

NOM :  
Prénom :  
1S

<b>Devoir Synthèse</b>	
19 mai 2010	

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	
/7,5	/3	/5	/4,5	<b>/20</b>

Penser à soigner la présentation de votre devoir (souligner, encadrer, aérer,...). Calculatrice autorisée.

Justifier toutes vos affirmations.

**Exercice 1 :**

Soit :

- $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x + 3}$
- $C_f$  sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthogonal.
- $\alpha = \frac{-9 - 4\sqrt{6}}{3}$  et  $\beta = \frac{-9 + 4\sqrt{6}}{3}$
- $\Delta$  la droite d'équation  $y = 3x - 9$ .

- 1) Donner l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f$ .
- 2) Déterminer les coordonnées de  $A$  point d'intersection entre l'axe des ordonnées et  $C_f$ .
- 3) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- 4) Déterminer  $f'$ , la fonction dérivée de  $f$ .
- 5) Démontrer que pour tout  $x$  de  $D_f$ , on a  $f'(x) = \frac{3(x - \alpha)(x - \beta)}{(x + 3)^2}$ .
- 6) Dresser le tableau de variations de  $f$ . On ne demande pas de calculer les valeurs des extrema.
- 7) Prouver que pour tout  $x$  de  $D_f$ , on a  $f(x) = 3x - 9 + \frac{32}{x + 3}$ .
- 8) Montrer que  $\Delta$  est asymptote oblique à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 9) Déterminer en fonction de  $x$ , la position relative de  $C_f$  et  $\Delta$ .

**Exercice 2 :**

$ABH$  est un triangle rectangle en  $H$  tel que  $BH = 2$  et  $AB = 3$ .

- 1)  $K$  est le projeté orthogonal de  $H$  sur  $(AB)$ , calculer de deux manières différentes  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH}$  puis en déduire  $BK$ .

- 2)  $M$  est un point de  $[AB]$  tel que le triangle  $HBM$  soit isocèle en  $B$ . Déterminer la longueur  $HM$ .

**Exercice 3 :**

$ABC$  est un triangle équilatéral de côté 5 cm,  $G$  est le centre de gravité de ce triangle et  $H$  est le barycentre des points pondérés  $(A ; 1)$  et  $(B ; 2)$ .

- 1) Construire les points  $G$  et  $H$  (codages attendus).

- 2) Déterminer et construire les ensembles suivants :

- a) L'ensemble des points  $M$  du plan vérifiant :

$$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \|$$

- b) L'ensemble des points  $M$  du plan vérifiant :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$$

- c) L'ensemble des points  $M$  du plan vérifiant :

$$\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \| = \| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \|$$

**Exercice 4 :**

$(u)$  est la suite définie par  $u_0 = 0$  et la relation de

récurrence  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$  pour tout entier  $n$ .

$(v)$  est la suite définie pour tout entier  $n$  par  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ .

- 1) Calculer  $v_0$ ,  $v_1$  et  $v_2$ .
- 2) Montrer que  $(v)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme  $v_0$  et la raison.
- 3) Montrer que  $v_n = -\frac{1}{3} \times 0,2^n$  pour tout entier  $n$ .
- 4) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 5) Etudier la convergence des suites  $(u)$  et  $(v)$ .