Correction DS mai 2010

Exercice 1

$D_f =]-\infty\,;-3[\cup]-3\,;+\infty[$ *0,5*

L'axe des ordonnées a pour équation $x=0$ donc $A(0\,;f(0))$; $A(0\,;\frac{5}{3})$. *0,5*

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+5}{x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$ *0,25*

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5}{x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ *0,25*

$\lim\limits_{x\to-3^-} 3x^2+5 = 32$ et $\lim\limits_{x\to-3^-} x+3 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$ *0,25*

$\lim\limits_{x\to-3^+} 3x^2+5 = 32$ et $\lim\limits_{x\to-3^+} x+3 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$ *0,25*

La droite d'équation $x=-3$ est asymptote *verticale* à C_f.

$$f'(x) = \frac{6x\times(x+3)-(3x^2+5)\times 1}{(x+3)^2} = \frac{3x^2+18x-5}{(x+3)^2} = \frac{3\left(x^2+6x-\frac{5}{3}\right)}{(x+3)^2}$$

pour tout x de D_f. De plus : $6^2-4\times1\times\frac{-5}{3} = \frac{128}{3} > 0$;

Les racines du numérateur sont : $\frac{-6\pm\sqrt{\frac{128}{3}}}{2} = \frac{-6\pm8\sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = -3\pm4\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -3\pm\frac{4\sqrt{6}}{3}$; c'est-à-dire α et β, d'où le résultat cherché. *1+1*

x	$-\infty$		α		-3		β		$+\infty$
f'		+		-	‖	-		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘		↗	$+\infty$

1

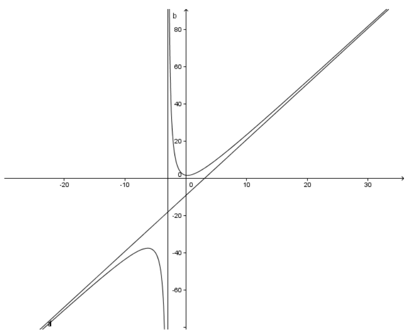
$3x-9+\frac{32}{x+3} = \frac{(3x-9)(x+3)+32}{x+3} = f(x)$ et ceci pour tout x de D_f *0,5*

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(3x-9)) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{32}{x+3} = 0$ (même limite en $+\infty$) donc la droite d'équation $y=3x-9$ est asymptote *oblique* à C_f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$. *0,5*

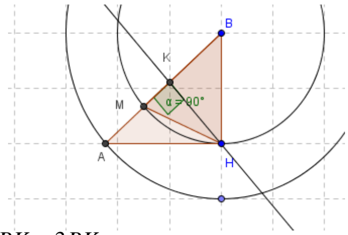
On détermine le signe de $(f(x)-(3x-9)) = \frac{32}{x+3}$; *0,5*

Si $x<-3$ alors C_f est au dessous de Δ. *0,25*

Si $x>-3$ alors C_f est au dessus de Δ. *0,25*



Exercice 2



$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BK} = BA\times BK = 3BK$ *0,5*

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH} = (\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}).\overrightarrow{BH} = BH^2+0 = 4$ donc $BK = \frac{4}{3}$ *1*

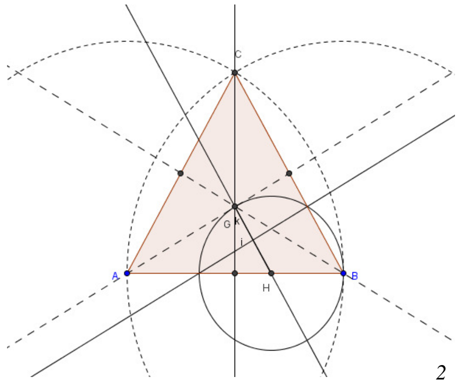
D'après les égalités trigonométriques (Al Kashi dans MBH et cosinus dans ABH rectangle), on a :

$MH^2 = BM^2+BH^2-2\times BM\times BH\times\cos M\hat{B}H$ *0,5*

$MH^2 = 2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos A\hat{B}H$

$MH^2 = 8-8\times\frac{BH}{BA} = \frac{8}{3}$; $MH = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ *1*

Exercice 3



2

G est l'isobarycentre des points A, B et C :

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|3\,\overrightarrow{MG}\| = 3\,MG$.

$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\| = \|3\,\overrightarrow{MH}\| = 3\,MH$.

Donc l'ensemble cherché est la médiatrice de $[GH]$. *1*

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ colinéaire à $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$ équivaut à $\overrightarrow{MG}$ colinéaire à $\overrightarrow{MH}$. Donc l'ensemble cherché est la droite (GH). *1*

$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = BA$.

Donc l'ensemble cherché est le cercle de centre H de rayon $\frac{BA}{3} = \frac{5}{3}$. *1*

Exercice 4

$v_0 = \frac{-1}{3}$; $v_1 = \frac{u_1-1}{u_1+3} = \frac{\frac{3}{4}-1}{\frac{3}{4}+3} = \frac{-1}{15}$; *0,5*

$u_2 = \frac{2u_1+3}{u_1+4} = \frac{\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{4}+4} = \frac{9}{2}\times\frac{4}{19} = \frac{18}{19}$ *0,25*

$$v_2 = \frac{u_2 - 1}{u_2 + 3} = \frac{\frac{18}{19} - 1}{\frac{18}{19} + 3} = \frac{-1}{19} \times \frac{19}{75} = \frac{-1}{75} \;;$$ *0,5*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 1} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 1}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_n - 1}{u_n + 4}}{\frac{5u_n + 15}{u_n + 4}} \times \frac{u_n + 3}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} = 0,2$$ *1,5*

Donc (v) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{-1}{3}$ et de raison 0,2. *0,25*

$v_n = -\frac{1}{3} \times 0,2^n$ par définition explicite *0,5*

$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ équivaut à $-\frac{1}{3} \times 0,2^n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ puis :

$-\frac{1}{3} \times 0,2^n \times (u_n + 3) = u_n - 1 \;;\; -\frac{1}{3} \times 0,2^n \times u_n - 0,2^n = u_n - 1$

$(1 - \frac{1}{3} \times 0,2^n) \times u_n = 0,2^n - 1 \;;\; u_n = \dfrac{0,2^n - 1}{1 - \frac{1}{3} \times 0,2^n}$ *1*

ceci pour tout entier *n*.

Vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^n = 0$, la suite (v) converge vers 0 et la suite (u) vers -1. *0,5*