$1^{\text{ière}}$ ES2 Jeudi 27 mai

Dernier contrôle

Exercice 1 : (points)

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^3 - 1$
2. $f_2(x) = (2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 2)\times(x^2 + 3x + 2)$ *(on ne cherchera pas à développer le résultat)*

Exercice 2 : (points)

Déterminer, en justifiant, toutes les asymptotes aux courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 3x + 1$
2. $f_2(x) = -x^2 + 3x - 2$
3. $f_3(x) = \dfrac{3x + 2}{x + 3}$

Exercice 3 : (points)

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Calculer la fonction dérivée f ’.
3. **a)** Etudier le signe de f ’ sur D_f.
   b) En déduire le tableau de variation de f.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
5. En déduire l’existence d’asymptote(s) dont on donnera une équation.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d’abscisse x = 0.
7. Tracer la courbe C_f et (T) dans un repère.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. f ’(x) = $3x^2$

2. f ’(x) = $(6x^2 - 6x + \frac{1}{2})(x^2 + 3x + 2) + (2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 2)(2x + 3)$

Exercice 2:

1. Aucune asymptote
2. Aucune asymptote
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\Rightarrow$ y = 3 asymptote horizontale au voisinage de + et de – ∞.

   $\lim\limits_{x \to -3} |f(x)| = +\infty$ $\Rightarrow$ x = – 3 asymptote verticale.

Exercice 3:

1. $D_f = \mathbb{R}$

2. $f'(x) = \dfrac{(2x + 2)(2x^2 + 1) - (x^2 + 2x + 1)(4x)}{(2x^2 + 1)^2}$

   $= \dfrac{(4x^3 + 2x + 4x^2 + 2) - (4x^3 + 8x^2 + 4x)}{(2x^2 + 1)^2} = \dfrac{-4x^2 - 2x + 2}{(2x^2 + 1)^2}$

3. a) f ’ est du sine de son numérateur puisque le dénominateur est un carré.

   $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-4) \times 2 = 4 + 32 = 36$

   Alors $x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{36}}{2\times(-4)} = \dfrac{1}{2}$

   $x_2 = -1$

   Le trinôme du second degré est du signe de a (ici a = – 4) à l’extérieur des racines, on déduit :

x	– ∞		– 1		½		+ ∞
f ’(x)		–	0	+	0	–	
f	½	↘	0	↗	3/2	↘	½

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

   De même en + ∞ $\Rightarrow$ y = $\dfrac{1}{2}$ asymptote horizontale en + et en – ∞.

5. (T) : y = f ’(0)(x – 0) + f(0)

   y = 2x + 1