1ière ES spé. Lundi 31 mai

The last one…

Calculatrice interdite.

Exercice 1 : (points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que B est l'inverse de A.
2. En déduire les coordonnées du point d'intersection des plans :
   $P_1 : 3x + 2y + z = 0$; $P_2 : 5x + 5y + 8z - 11 = 0$ et $P_3 : 3x + 3y + 5z - 5 = 0$

Exercice 2 : (points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer la matrice P^{-1} en explicitant toutes les étapes du calcul.
   (En cas d'échecs, on admettra que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$)
2. Vérifier que $A = P \times D \times P^{-1}$.
3. Calculer D^2, D^3 et D^4.
4. Conjecturer une écriture de la matrice D^n .
5. Expliquer pourquoi : $A^2 = P \times D^2 \times P^{-1}$; $A^3 = P \times D^3 \times P^{-1}$ et $A^4 = P \times D^4 \times P^{-1}$.
6. En déduire alors A^4.

Exercice 3 : (points)

Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jours. Elle produit deux types de chaises, les une vendues 30 € pièce, les autres 60 € pièce. La production d'une journée a été totalement vendue et le montant des ventes s'élève à 7 260 €.

On note x le nombre de chaises à 30 € et y le nombre de chaises à 60 € vendues dans la journée.

1. Montrer que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 7260 \end{pmatrix}$
2. En déduire le nombre de chaises à 30 € et le nombre de chaises à 60 € qui ont été vendues.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. $A \times B = B \times A = I_3$, on en déduit que $B = A^{-1}$.
2. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + 8z = 11 \\ 3x + 3y + 5z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 36 \\ 12 \end{pmatrix}$

   Soit M(-22 ; 36 ; 12) le point d'intersection de P_1, P_2, P_3.

Exercice 2 :

1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P^{-1} \times P = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & -a + 2b \\ d & -c + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   d'où $\begin{cases} b = 1 \\ -a + 2b = 0 \\ d = 0 \\ -c + 2d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 0 \end{cases}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $P \times D \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A.$

3. $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

   $D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

   $D^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

4. On conjecture : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

5. $A^2 = A \times A = (P \times D \times P^{-1}) \times (P \times D \times P^{-1}) = P \times D \times \underline{P^{-1} \times P} \times D \times P^{-1} = P \times D^2 \times P^{-1}$

   $A^3 = A^2 \times A = (P \times D^2 \times \underline{P^{-1}) \times (P} \times D \times P^{-1}) = P \times D^3 \times P^{-1}$

   De même $A^4 = P \times D^4 \times P^{-1}$

6. $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 1 & 32 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -30 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

1. Nombre de chaises : $x + y = 150$

   Prix de vente : $30x + 60y = 7260 \Rightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ 30x + 60y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 7260 \end{pmatrix}$

   Soit : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 7260 \end{pmatrix}$

2. $A \times X = B \Rightarrow X = A^{-1} \times B$

   D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{30} \\ -1 & \frac{1}{30} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 150 \\ 7260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 92 \end{pmatrix}$

58 chaises à 30 € et 92 chaises à 60€ ont donc été vendues.