

# Le barycentre

## I. Le point sur les connaissances

Relation de Chasles, règle du parallélogramme  
Opérations sur les vecteurs ( $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $k\vec{u}$ , ... =  
Colinéarité de vecteurs  
Coordonnées de vecteurs  
Points alignés

## II. Barycentre de deux points pondérés

### 1. Définition

**Déf :** Soit A et B deux points du plan et  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\alpha + \beta \neq 0$ , alors on note G le barycentre du système  $\{(A ; \alpha), (B ; \beta)\}$  le point du plan défini par :

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = 0$$

### 2. Propriétés

**Prop 1 :** Si G barycentre du système  $\{(A ; \alpha), (B ; \beta)\}$ , alors  $\vec{AG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{AB}$

Conséquence : G, A et B sont alignés.

**Prop 2 :** On peut multiplier tous les coefficients par un réel  $k \neq 0$  sans changer le barycentre.

**Prop 3 :** si  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , alors G est le centre de masse du système  $\{(A ; \alpha), (B ; \beta)\}$ , c'est-à-dire le point d'équilibre.

## III. Barycentre de trois points pondérés

### 1. Définition et propriétés

**Déf :** Soit A, B et C trois points du plan et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , alors on note G le barycentre du système  $\{(A ; \alpha), (B ; \beta), (C ; \gamma)\}$  le point du plan défini par :

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = 0$$

**Prop 1 :** Pour tout point M du plan, on a :

$$\vec{MG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{MC}$$

**Prop 2 :** Isobarycentre de trois points = centre de gravité du triangle

**Prop 3 :** On peut multiplier tous les coefficients par  $k \neq 0$ ...

### 2. Associativité du barycentre

**Propriété :** Soit A, B et C trois points du plan et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels tels que

$\alpha + \beta \neq 0$  et  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , et G le barycentre du système

$\{(A ; \alpha), (B ; \beta), (C ; \gamma)\}$ . Alors G est barycentre de  $\{(I ; \alpha + \beta), (C ; \gamma)\}$  où

I est le barycentre de  $\{(A ; \alpha), (B ; \beta)\}$ .

## IV. Coordonnées du barycentre

**Propriété :** Soit A, B et C trois points du plan et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels tels que

$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , et G le barycentre du système  $\{(A ; \alpha), (B ; \beta), (C ; \gamma)\}$ .

Alors dans le plan muni d'un repère orthonormal (O;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ), avec A( $x_A$ ;  $y_A$ )

B( $x_B$ ;  $y_B$ ) et C( $x_C$ ;  $y_C$ ), G( $x_G$ ;  $y_G$ ) avec :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

## V. Barycentre de n points

Par associativité du barycentre, on peut généraliser la définition et les propriétés vues en II.