Valeur absolue

I. Définitions

1. Notion de distance

Déf : Soit M d'abscisse x sur un axe (O, I) alors OM = $|x|$

Soit M d'abscisse x et N d'abscisse y sur un axe (O, I) alors MN = $|x-y|$

De façon plus générale : dist(x ; y) = $|y-x|$ $\quad \forall$ x, y $\in \mathbb{R}$

2. Le point de vue algébrique

Propriété : Soit f(x) = $|x|$, alors $\begin{cases} \text{si } x \geq 0, f(x) = x \\ \text{si } x < 0, f(x) = -x \end{cases}$

3. Propriétés

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

$|xy| = |x| \times |y|$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Autre propriété : Pour tout x réel : $\sqrt{x^2} = |x|$

4. Résolution d'équations et d'inéquations

Ex : $|x-2| = 4 \Leftrightarrow d(2\,;x) = 4$

$|x-2| \leq 4 \Leftrightarrow d(2\,;x) \leq 4$

II. Etude de la fonction $x \rightarrow |x|$

Soit f(x) = $|x|$ définie sur $\mathbb{R}$, alors f est une fonction affine par morceaux