

Contrôle n° 4

Exercice 1 : (3 points)

Démontrer que la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}^- .

Exercice 2 : (4,5 points)

- 1) Dans chaque cas, donner un encadrement de x^2 :
 - a) $-5 \leq x \leq -1$
 - b) $-3 \leq x \leq 1$
 - c) $x < 6$
- 2) Dans chaque cas, déterminer pour quelles valeurs de x on a :
 - a) $x^2 > 30$
 - b) $2 \leq x^2 \leq 8$
 - c) $x^2 \leq 7$

Exercice 3 : (4,5 points)

- 1) Dans chaque cas, donner un encadrement de $\frac{1}{x}$:
 - a) $-4 \leq x \leq -2$
 - b) $x \geq 9$
 - c) $x \leq -2$
- 2) Dans chaque cas, déterminer pour quelles valeurs de x on a :
 - a) $\frac{1}{x} > 16$
 - b) $\frac{1}{x} \leq -5$
 - c) $2 < \frac{1}{x} < 4$

Exercice 4 : (5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ sur D_f .

- 1) Déterminer D_f .
- 2) Déterminer deux réels a, b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+2}$
- 3) Déterminer les limites de f aux bornes ouvertes de D_f .

Exercice 5 : (3 points)

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* .

- 1) Montrer que $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
- 2) Montrer que f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
- 3) Comparer $\frac{123456790}{123456789}$ et $\frac{123456791}{123456790}$



Ce devoir, c'est de la bombe !

Corrigé

Exercice 1 :

Soit $a, b \in]-\infty ; 0[$ avec $a < b$, alors $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$

Or $ab > 0$ et $b - a > 0$ donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$ et ainsi $a < b \Rightarrow f(a) > f(b) \Leftrightarrow f$ décroissante sur \mathbb{R}^* .

Exercice 2 :

- 1) a) $1 \leq x^2 \leq 25$ b) $0 \leq x^2 \leq 9$ c) $x^2 \geq 0$
2) a) $x \in]-\infty ; -\sqrt{30}[\cup]\sqrt{30} ; +\infty[$ b) $[-\sqrt{8} ; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2} ; \sqrt{8}]$
c) $x \in [-\sqrt{7} ; \sqrt{7}]$

Exercice 3 :

- 1) a) $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$ b) $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{9}$ c) $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} < 0$
2) a) $0 < x < \frac{1}{16}$ b) $-\frac{1}{5} \leq x < 0$ c) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$

Exercice 4 :

1) $Df = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2) $f(x) = a + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b}{x+2} = \frac{ax+(2a+b)}{x+2}$

On en déduit $\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$ il s'en suit que $f(x) = 2 - \frac{3}{x+2}$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+2} = 0$ De même, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0^-$, donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ Et par le même raisonnement, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.

Exercice 4 :

1) $f(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

2) Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ puisque la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}_+^*

Et donc $\frac{1}{a} + 1 > \frac{1}{b} + 1$

soit $f(a) > f(b)$ et donc f est décroissante sur \mathbb{R}_+^*

3) On remarque que $\frac{123456790}{123456789} = f(123456789)$ et $\frac{123456791}{123456790} = f(123456790)$

Comme f est décroissante sur \mathbb{R}_+^* , $123456789 < 123456790 \Rightarrow f(123456789) > f(123456790)$

Et donc : $\frac{123456790}{123456789} > \frac{123456791}{123456790}$