Dérivation

I. Nombre dérivé

1. Taux d'accroissement

Rappel : Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, alors le taux d'accroissement de (AB) est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Déf. : On appelle **nombre dérivé** de f en x = a, s'il existe, le réel $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Explication : Ceci correspond au taux d'accroissement de (AM) avec A d'abscisse a fixé sur $y = f(x)$ et M d'abscisse $(a + h)$ mobile sur $y = f(x)$. Le nombre dérivé est le taux d'accroissement obtenu pour M « très proche » de A.
Dans ce cas (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe $y = f(x)$.

2. Tangente

Propriété : La tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ en $A(a ; f(a))$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Rmq : On remarque en particulier que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en x = a.

II. Fonctions dérivées

1. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée	
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n.x^{n-1}$	(en particulier, $(x^2)' = 2x$)
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	(en particulier, $(\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$)
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	(rmq : f n'est dérivable que sur $]0; +\infty[$)
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	

2. Opérations sur les dérivées

u et v sont dérivables sur I, $k \in \mathbb{R}$:

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(k \times u)' = k \times u'$
- $(u \times v)' = u'v + uv'$
- pour x tq $v(x) \neq 0$: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

III. Sens de variation d'une fonction

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur I, alors si $\forall x \in I$, on a :

$f'(x) < 0$: f est décroissante sur I,
$f'(x) > 0$: f est croissante sur I,
$f'(x) = 0$: f est constante sur I.