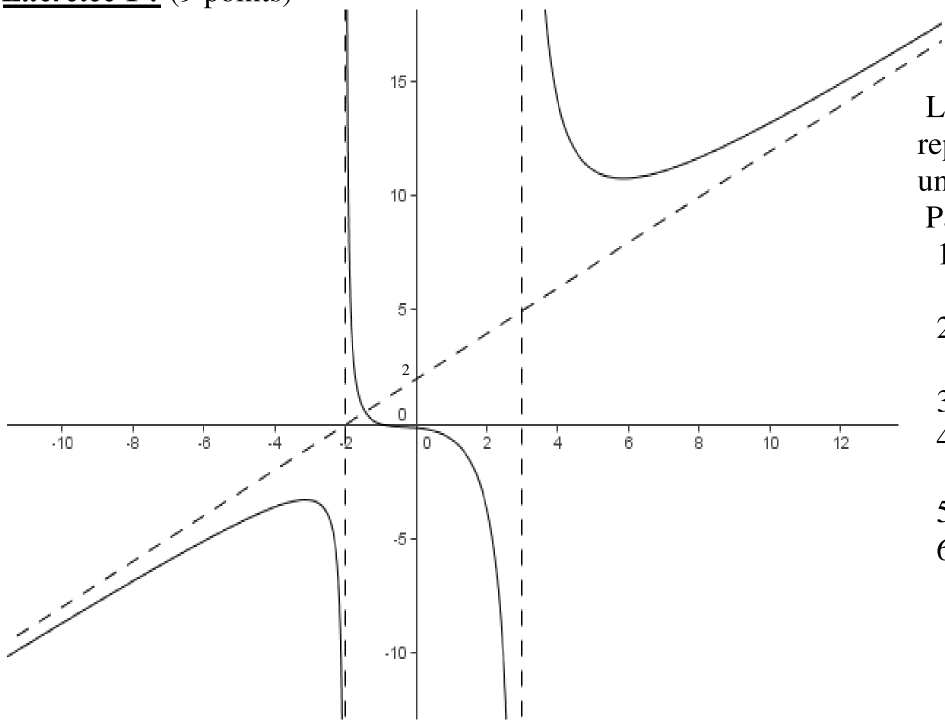
Lundi 10 janvier

Contrôle asymptotes

Exercice 1 : (9 points)



La courbe Cf ci-contre représente une fonction f dans un repère.

Par lecture, donner :

1) le domaine de définition Df de f.
2) les solutions de f '(x) = 0 (avec f ' dérivée de f)
3) le tableau de signe de f '
4) les limites de f aux bornes ouvertes de Df.
5) les asymptotes à Cf.
6) le tableau de variation de f

Exercice 2 : (12 points)

Soit f la fonction par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 2}$ sur son domaine de définition Df, et on note Cf la courbe représentative de f dans un certain repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer Df.
2) Etudier les limites de f aux bornes de Df.
3) Déterminer trois réels *a, b* et *c* tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$ pour tout $x \in$ Df.
4) a) Déterminer les équations (si elles existent) d'asymptotes horizontales et verticales à Cf.
   b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à Cf en $+\infty$ et en $-\infty$.
5) Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.
6) Etudier la position de Cf par rapport à (Δ).
7) Tracer les asymptotes et Cf dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

CORRIGE

Exercice 1 :

1) Df = $\mathbb{R}$ / { – 2 ; 3}

2) f ’(x) = 0 $\Rightarrow$ S = { – 3 ; – 1 ; 5}

3)

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
		+	0	–	‖	–	‖	–	0	+	

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

5) Il y a trois asymptotes : x = – 2 ; x = 3 ; et y = x + 2

6)

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	10	↗	$+\infty$

Exercice 2 :

1) Df = $\mathbb{R}$ \ { – 2}

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

3) $ax + b + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \dfrac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 1 \\ 2b + c = 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$ et donc f(x) = x – 1 + $\dfrac{4}{x+2}$

4) a) Pas d’asymptote horizontale ; 1 verticale : x = – 2

b) f(x) – (x – 1) = $\dfrac{4}{x+2}$ Or $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$

Donc (Δ) est bien asymptote à Cf en – ∞ et en + ∞.

5) f ’(x) = $\dfrac{(2x+1)(x+2)-(x^2+x+2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
f ’		+	0	–	‖	–	0	+	
	$-\infty$	↗	f(-4)	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	f(0)	↗	$+\infty$

6) Cf est au dessus de (Δ) $\Leftrightarrow$ f(x) $\geq$ x – 1

$\Leftrightarrow$ f(x) – (x – 1) $\geq$ 0

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{x+2} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ x + 2 $\geq$ 0 soit sur] – 2 ; + ∞[et donc Cf est en dessous de (Δ) sur] – ∞ ; – 2[.

7) Voir écran de sa calculatrice…