Lundi 14 mars

Contrôle Synthèse n° 2

Durée : 3 heures (9h00 – 12h00)
Calculatrice autorisée

Exercice 1 : (4,5 points)

ABC est un triangle équilatéral de côté 5cm, G est le centre de gravité de ce triangle et H est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2).

1. Construire les points G et H.
2. Soit I le milieu de [GH],
   a) Exprimer I comme barycentre de H et G,
   b) Exprimer I comme barycentre de A, B et C.
3. Déterminer et construire les ensembles suivants :
   a) l'ensemble (E_1) des points M du plan vérifiant : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$,
   b) l'ensemble (E_2) des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ colinéaire à $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$,
   c) l'ensemble (E_3) des points M du plan vérifiant : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$

Exercice 2 : (8 points)

Partie A :

Soit ϕ (x) = $\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les réels *a* et *b* pour que la courbe représentative de ϕ soit tangente au point I de coordonnées (1 ; -2) à la droite (T) d'équation y = -3x + 1.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur Df = $\mathbb{R}/\{2\}$ par f(x) = $\dfrac{x^2-x+2}{x-2}$

1. Déterminer la fonction f ' dérivée de f.
2. a) Etudier le signe de g(x) = $x^2 - 4x$
   b) Montrer que f ' est du signe de g.
   c) Dresser alors le tableau de variation de f sur Df.
3. Etudier les limites de f aux bornes de Df, puis compléter le tableau de variation.

4. En déduire l'existence d'asymptotes horizontales ou verticales à la courbe Cf représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal.
5. a) Déterminer trois réels α, β et δ tels que $f(x) = \alpha x + \beta + \dfrac{\delta}{x-2}$

   b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à Cf en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c) Etudier les positions relatives de Cf et de (Δ).
6. Déterminer les coordonnées des points de Cf ayant une tangente parallèle à $y = -3x$.
7. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal tracer Cf, (T) et (Δ) pour $x \in [-5 ; 5]$ et $y \in [-10 ; 15]$

<u>Exercice 3 :</u> (4 points)

Soit, dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$les points $A(\sqrt{3} ; 1)$, $B(-\sqrt{2} ; \sqrt{2})$ et $C(2 ; 0)$

1. a) Montrer que A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

   b) Déterminer les coordonnées polaires de A, B et C dans le repère polaire $(O; \vec{i})$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points D et E dont les coordonnées polaires sont $D(2 ; -\dfrac{\pi}{6})$ et $E(2 ; -\dfrac{2\pi}{3})$.
3. a) Déterminer l'ensemble des réels α de $[0 ; 2\pi[$ tel que : $\cos \alpha = -\dfrac{1}{2}$

   b) Déterminer l'ensemble des réels α de $]-\pi ; \pi]$ tel que : $\cos \alpha \leq -\dfrac{1}{2}$.

<u>Exercice 4 :</u> (5 points)

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on définit $A(2 ; 1)$, $B(-2 ; -1)$ et $C(-1 ; 3)$.

1. a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

   b) Montrer que $\vec{n}(-2 ; 4)$ est un vecteur normal à (AB).

   c) Déterminer une équation de (AB).
2. a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à la hauteur issue de C dans ABC.

   b) Donner une équation de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

   c) Donner une équation de la médiatrice à [AB]
3. Déterminer une équation du cercle (C) de centre C passant par B.
4. a) **R.O.C.** :

   Démontrer le théorème de la médiane :

   « Soit A et B deux points du plan et I le milieu de [AB], alors pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$. »

   b) Déterminer AB.

   c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 20$

Eléments de correction

Exercice 1 :

1.Trop facile…

2. I barycentre de {(H ; 3), (G ; 3)}

Comme G isobarycentre de A, B, C et H barycentre de {(A ; 1), (B ; 2)}, on a

I barycentre de {(A ; 1), (B ; 2), (A ; 1), (B ; 1), (C ; 1)} soit {(A ; 2), (B ; 2), (C ; 1)}

3. a) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left|\left|3.\overrightarrow{MG}\right|\right| = \left|\left|3.\overrightarrow{MH}\right|\right| \Leftrightarrow MG = MH$

Ainsi (E) est la médiatrice [GH]

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=k(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})$ avec $k \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{MG} = k\times 3.\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = k.\overrightarrow{MH}$

Soit, M, G et H alignés et ainsi (F) est la droite (GH).

c) $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left|\left|3.\overrightarrow{MH}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{BA}\right|\right| \Leftrightarrow MH = \frac{1}{3}\times 5 = \frac{5}{3}$

Ainsi (G) est le cercle de centre H et de rayon $\frac{5}{3}$.

Exercice 2 :

Partie A :

1. ϕ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$
2. $I \in Cf \Rightarrow \phi(1) = -2 \Leftrightarrow a + b = 1$

   Tangente en I : $y = -3x + 1 \Rightarrow \phi'(1) = -3$ or, $\phi'(x) = \dfrac{x^2-4x-2a+b}{(x-2)^2} \Rightarrow 2a + b = 0$

   Finalement, $a = -1$ et $b = 2$.

Partie B :

1. $f'(x) = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$
2. a) $g(x) = x^2 - 4x$ du signe de a à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
g		+	0	−	0	+	

   b) $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$ comme $(x-2)^2 > 0$ $\forall$ $x \in Df$, f ' et g sont de même signe

   c) On déduit alors :

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
f'		+	0	−	||	−	0	+	
f		↗		↘	||	↘		↗	

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$
4. x = 2 est une asymptote verticale.
5. a) $f(x) = \dfrac{\alpha x^2+(-2\alpha+\beta)x+(-2\beta+\delta)}{x-2}$ par identification : $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\\ \delta=4\end{cases}$

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow y = x + 1$ est asymptote oblique à Cf.

   De même en $-\infty$.

   c) $\text{Sgn}\,(f(x)-(x+1)) = \text{Sgn}\,\dfrac{4}{x-2}$

donc $f(x) - (x + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 2$ et donc Cf est au dessus de (Δ) sur $]2 ; +\infty[$ et en dessous sur $]-\infty ; 2[$.

6. $f'(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = -3(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow 4x^2 - 16x + 12 = 0$

   Soit, $x^2 - 4x + 3 = 0$ alors $\Delta = 4$ et $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

   Il y a donc deux points : I(1 ; -2) et (3 ; 8)
7. Voir l'écran de sa calculatrice adorée…

<u>Exercice 3 :</u>

1. a) OA = 2 OB = 2 et OC = 2 donc A, B et C sur cercle de centre O et de rayon R = 2.

   b) $A(2 ; \frac{\pi}{6})$ $B(2 ; \frac{3\pi}{4})$ et $C(2 ; 0)$
2. $D(2.\cos -\frac{\pi}{6} ; 2.\sin -\frac{\pi}{6})$ soit $D(\sqrt{3} ; -1)$ et $E(-1 ; -\sqrt{3})$
3. a) $\cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \in \{\frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}\}$

   b) $\cos \alpha \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \in]-\pi; -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3} ; \pi]$

<u>Exercice 4:</u>

1. a) $\overrightarrow{AB}(-4; -2)$

   b) $\vec{n} . \overrightarrow{AB} = (-4)\times(-2) + (-2)\times(4) = 0$

   c) (AB) : $-2x + 4y + c = 0$ $A \in (AB) \Rightarrow c = 0 \Rightarrow$ (AB) : $-2x + 4y = 0$
2. a) un vecteur normal est $\overrightarrow{AB}(-4; -2)$

   b) d'où $-4x - 2y + c = 0$ C $\in$ à la droite $\Rightarrow c = 2$ et donc $-4x - 2y + 2 = 0$

   c) médiatrice parallèle à la hauteur d'où $-4x - 2y + c' = 0$

   O(0 ; 0) $\in$ à la médiatrice, d'où $-4x - 2y = 0$
3. $BC = \sqrt{17}$

   D'où : $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 17$
4. a) cf cours

   b) $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

   c) $MA^2 + MB^2 = 20 \Leftrightarrow 2MI^2 + 1/2AB^2 = 20 \Leftrightarrow MI^2 = 5$

   donc, M est sur le cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{5}$

   soit le cercle de diamètre [AB].