

Contrôle Suites

Exercice 1 : (4 points)

(U_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = \frac{2n-3}{n+1}$

1. a) Déterminer U_0, U_1, U_2
b) Déterminer U_{n+1} et U_{2n} (en fonction de n).
2. Déterminer le sens de variation de (U_n) .

Exercice 2 : (6 points)

Une entreprise estime le coût d'un forage ainsi : le premier mètre coûte 1000 € ; chaque mètre supplémentaire coûte 50 € de plus que le précédent.

Pour $n \geq 1$, on nomme U_n le coût du $n^{\text{ième}}$ mètre.

1. a) Définir la suite (U_n)
b) Donner la nature de (U_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.
2. Ecrire U_n en fonction de n et déterminer le coût du 15^{ième} mètre.
3. a) Rappeler (sans justification) la valeur de la somme : $S = U_1 + U_2 + \dots + U_n$
b) Quelle profondeur pourra atteindre le forage si l'on dispose d'un crédit de 519 750 € ?

Exercice 3 : (4 points)

1. Démontrer la formule de cours suivante :

$$\text{« Soit } (U_n) \text{ une suite géométrique de raison } q (q \neq 1) : S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{U_{n+1} - U_0}{q - 1} \text{ »}$$

2. Calculer $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1048576}$

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$ et soit (U_n) la suite définie par son premier terme

$U_0 = -3$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$

- 1) On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = U_n - 3$.
a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.
b) Ecrire V_n en fonction de n .
- 2) En déduire U_n en fonction de n .
- 3) Déterminer alors $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{12}$

CORRIGE

Exercice 1 :

1. a) $U_0 = -3 \quad U_1 = -\frac{1}{2} \quad U_2 = \frac{1}{3}$

b) $U_{n+1} = \frac{2(n+1)-3}{(n+1)+1} = \frac{2n-1}{n+2}$ et $U_{2n} = \frac{4n-3}{2n+1}$

2. $U_{n+1} - U_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (U_n)$ est croissante pour tout n entier naturel.

Exercice 2 :

1. a) $U_{n+1} = U_n + 50$

b) (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 50$ et de premier terme : $U_1 = 1000$

2. $U_n = U_1 + (n-1) \times r \Rightarrow U_n = 1000 + (n-1) \times 50 = 950 + 50n$

Alors le 15^{ème} mètre coûte : $U_{15} = 950 + 50 \times 15 = 1700$ €

3. a) $S = U_1 + \dots + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$

b) Le prix total doit être inférieur à 519 750 €, soit $S = U_1 + \dots + U_n \leq 519750$

Ainsi, $\frac{n}{2}(U_1 + U_n) \leq 519750 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(1000 + 950 + 50n) \leq 519750$

$$\Leftrightarrow 25n^2 + 975n - 519750 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 39n - 20775 \leq 0, \text{ on calcule } \Delta = 39^2 + 4 \times 20775 = 84521$$

$$\text{Alors } n_1 = \frac{-39 + \sqrt{84521}}{2} \approx 125,86 \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{-39 - \sqrt{84521}}{2} < 0$$

On pourra donc atteindre 125 mètres.

Exercice 3 :

1. Cf son cours adoré...

$$2. S = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - 1} = -2 \left(\frac{1}{2097152} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1048576} = \frac{262143}{524288}$$

Exercice 4 :

1. a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 3 = \left(-\frac{2}{3}U_n + 5\right) - 3 = -\frac{2}{3}(V_n + 3) + 2 = -\frac{2}{3}V_n$.

b) $V_n = V_0 \times q^n \Rightarrow V_n = -6 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

2. $U_n = V_n + 3 \Rightarrow U_n = 3 - 6 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

3. $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{12} = (V_0 + 3) + (V_1 + 3) + \dots + (V_{12} + 3) = (V_0 + V_1 + \dots + V_{12}) + 3 \times 13$

$$\text{Or, } V_0 + \dots + V_{12} = \frac{V_{13} - V_0}{-\frac{2}{3} - 1} = \frac{-6 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{13} + 6}{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5} \times 6 \times \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{13}\right)$$

$$\text{Donc } S = 39 - \frac{18}{5} \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{13}\right).$$