NOM :
Prénom :
1S

Devoir Synthèse

19 mai 2011

1	2	3	4	5	
/6	/3,5	/4	/4	/3,5	**/20**

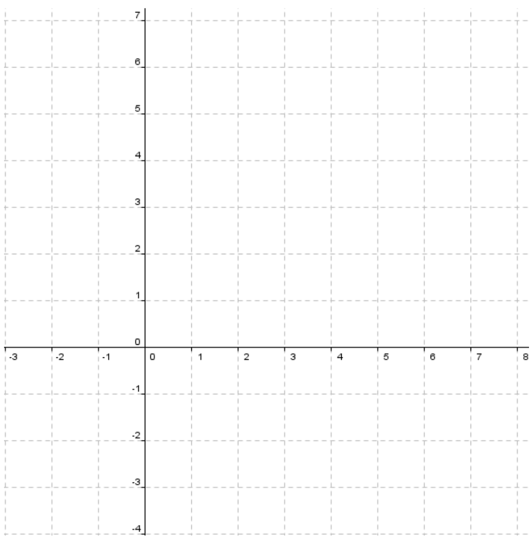
Penser à soigner la présentation de votre devoir (souligner, encadrer, aérer,…). Calculette autorisée.

Justifier toutes vos affirmations.

Exercice 1 :

- f est la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-5x+7}{x-3}$, pour tout x réel différent de 3.
- C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Δ la droite d'équation $y = x - 2$.

1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire l'existence d'une droite D asymptote à C_f dont on donnera une équation.
2) Déterminer les réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}, \forall x \neq 3.$$
3) a) Montrer que Δ est asymptote oblique à C_f.
   b) Etudier le signe de $\frac{1}{x-3}$ puis en déduire la position relative de C_f et Δ.
4) Déterminer f', la fonction dérivée de f.
5) En déduire le sens de variation de la fonction f grâce à l'étude du signe de $x^2 - 6x + 8$ et dresser son tableau de variations.
6) Déterminer par le calcul une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 5.
7) Tracer C_f, Δ, D et T dans le repère suivant :



Exercice 2 :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan. Soit $A(-1; 2), B(3; 1)$ et $C(1; -4)$.

1) a) Calculer les distances AB et AC.
   b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, puis une mesure en degrés de $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ arrondie à 0,1 près.
2) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AC]$.
3) Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AC]$.
4) Le point $E(-3; -1)$ appartient-il au cercle précédent ?

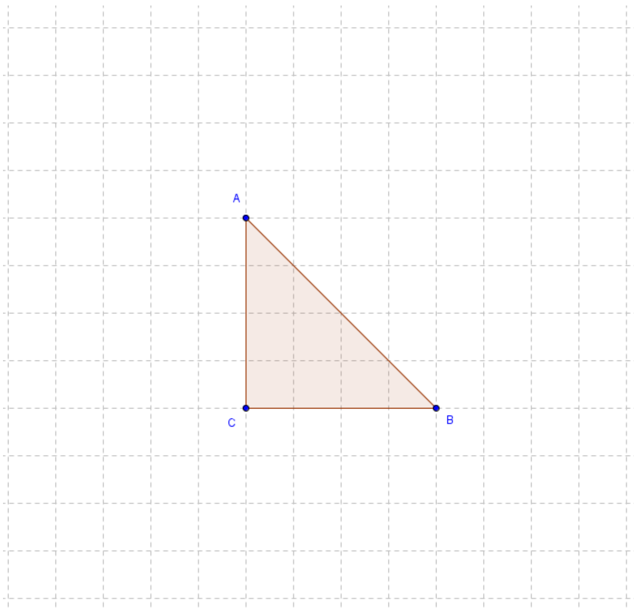
Exercice 3 :

ABC est un triangle rectangle et isocèle en C tel que $AC = 4$.

I est le milieu de $[BC]$, G est le barycentre de $(B$; 1) et $(C$; –2), K celui de $(B$; 1) et $(A$; –2) et L celui de $(A$; –2), $(B$; 1) et $(C$; –2).

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.
2) a) Construire les points G et K.
   En déduire :
   b) l'ensemble des points M vérifiant :
   $$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\|.$$
   c) l'ensemble des points M vérifiant :
   $$\|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}\|.$$
3) a) A l'aide de la propriété du barycentre partiel, construire le point L de deux manières différentes.
   b) En déduire que L est le centre de gravité du triangle BKG.

Toutes les constructions s'effectueront sur l'énoncé à partir du triangle ABC fourni ci-après.



Exercice 4 :

1) Résoudre dans IR :

$$4x^2 + \left(2\sqrt{3} - 2\right)x - \sqrt{3} = 0.$$

On pourra utiliser l'égalité : $\sqrt{16 + 8\sqrt{3}} = 2 + 2\sqrt{3}$.

2) a) Résoudre dans $[0\ ;\ 2\pi[$:

$$4(\cos\alpha)^2 + \left(2\sqrt{3} - 2\right)\cos\alpha - \sqrt{3} = 0.$$

b) Donner la mesure principale des solutions.

Exercice 5 :

(U) est la suite définie par $U_0 = 2$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1$, pour tout entier n.

1) Calculer U_1 et U_2.
2) Montrer que la suite (V) définie par le terme général $V_n = U_n - 2{,}5$ est une suite géométrique.
3) Exprimer V_n en fonction de n.
4) En déduire U_n en fonction de n.
5) Etudier la convergence de la suite (U).

Correction DS mai 2011

Exercice 1

$\lim_{x\to 3^-} x^2-5x+7=1$ et $\lim_{x\to 3^-} x-3=0^-$ donc $\lim_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$; de même, $\lim_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ *0,5*

la droite d'équation $x=3$ est asymptote *verticale* à C_f *.0,25*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}\right)}=-\infty$$

Puis, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. *0,5*

$ax+b+\frac{c}{x-3}=\frac{ax^2+(b-3a)x+(c-3b)}{x-3}$, $\forall x\neq 3$. Par identification, on obtient le système $\begin{cases} a=1\\ b-3a=-5\\ c-3b=7\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=-2.\\ c=1\end{cases}$ *0,75*

Donc $f(x)=x-2+\frac{1}{x-3}$

Ainsi $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-3}=0$ et la droite d'équation $y=x-2$ est asymptote *oblique* à C_f. *0,5*

Il s'agit d'étudier le signe de $\frac{1}{x-3}$ sur D_f: si $x\in\,]-\infty;3[$ alors C_f est au dessous de Δ ; si $x\in\,]3;+\infty[$ alors C_f est au dessus de Δ. *0,5*

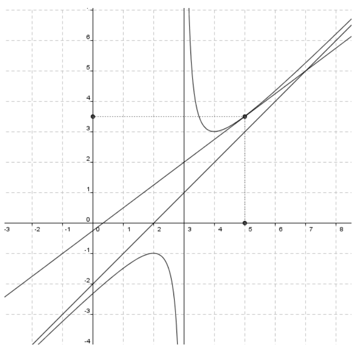
$f'(x)=\frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+7)(1)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}=\frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$ *0,75*

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		-		+	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

0,75

T: $y=f'(5)(x-5)+f(5)=\frac{3}{4}x-\frac{15}{4}+\frac{7}{2}$

T: $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ *0,5*



Exercice 2

$AB=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$ *0,25*

$AC=\sqrt{2^2+(-6)^2}=\sqrt{40}$ *0,25*

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4\times 2+(-1)\times(-6)=14$ *0,5*

Puis, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{14}{\sqrt{17}\times\sqrt{40}}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\approx 57{,}5°$ *0,5*

$M\in[AC]$ équivaut à $\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{AC}=0$ avec J milieu de $[AC]$

$\left(x-\frac{1-1}{2}\right)(2)+\left(y-\frac{2-4}{2}\right)(6)=0 \Leftrightarrow 2x+6y+6=0$

D'où, $x+3y+3=0$ est une équation cartésienne de *D.0,75*

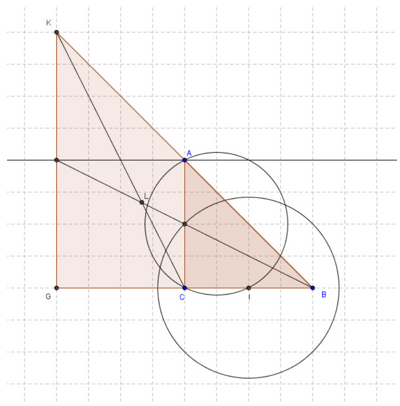
M est sur le cercle de diamètre $[AC]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$

$(-1-x)(1-x)+(2-y)(-4-y)=0$

$x^2+y^2+2y-9=0$ *0,75*

$(-3)^2+(-1)^2+2\times(-1)-9=-1\neq 0$ donc E n'est pas sur le cercle. *0,5*

Exercice 3



0,75

$\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\left(2\overrightarrow{MI}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$

Ainsi, l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AI]$*.0,75*

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right\|\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$$

$$=\left\|\overrightarrow{MB}-\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right)\right\|$$

qui équivaut à $\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|-\overrightarrow{BA}\right\|\Leftrightarrow MI=\frac{BA}{2}$ *0,75*

Ainsi, l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon $\frac{BA}{2}$.

$\left\|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MA}\right\|\Leftrightarrow\left\|-\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MK}\right\|$

$\Leftrightarrow MG=MK$

Ainsi, l'ensemble cherché est la médiatrice de $[GK]$. *0,75*

L peut s'obtenir comme barycentre de (B ; 1) et du milieu du segment $[AC]$ affecté du coefficient -4. *0,25*

L peut s'obtenir comme barycentre de (C ; –2) et (K ; –1)*.0,25*

L peut aussi s'obtenir comme barycentre de (A ; –2) et (G ; –1).

L appartient donc à deux médianes $[KC]$ et $[AG]$ du triangle BKG, c'est donc son centre de gravité. *0,5*

Exercice 4

$\Delta = \left(2\sqrt{3}-2\right)^2 - 4 \times 4 \times \left(-\sqrt{3}\right)$

$= 12 - 8\sqrt{3} + 4 + 16\sqrt{3} = 16 + 8\sqrt{3}$

$S = \left\{\frac{-2\sqrt{3}+2\mp\sqrt{16+8\sqrt{3}}}{8}\right\} = \left\{\frac{-2\sqrt{3}+2\mp(2+2\sqrt{3})}{8}\right\} = \left\{\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ *1+1*

Il s'agit de résoudre dans $[0\ ; 2\pi[$

$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$ *1*

Les mesures principales de ces solutions sont respectivement :

$\frac{5\pi}{6}; \frac{-5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}$. *1*

Exercice 5

$U_1 = \frac{3}{5}U_0 + 1 = \frac{11}{5}$; $U_2 = \frac{3}{5}U_1 + 1 = \frac{58}{25}$. *0,5+0,5*

Soit $n \geq 0$, $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\left(\frac{3}{5}U_n+1\right)-2{,}5}{U_n-2{,}5} = \frac{\frac{3}{5}U_n-1{,}5}{U_n-2{,}5} = \frac{\frac{3}{5}(U_n-2{,}5)}{U_n-2{,}5} = \frac{3}{5}$ *1*

Ainsi, $V_n = V_0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n = -0{,}5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$ *0,5*

Et, $U_n = V_n + 2{,}5 = -0{,}5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + 2{,}5$; $\forall n \geq 0.$ *0,5*

Enfin, comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, la suite ($U$) converge vers 2,5. *0,5*