T.S_5 12/09/11 CORRIGE

Limites d'une fonction

1) Déterminer les limites aux bornes ouvertes de son domaine de définition et en déduire toutes les asymptotes à la courbe représentative de f.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 + x - 2}$$

2) Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} (\cos^2 x - x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (\cos^2 x - x)$

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{6x^3}{3x^3 + 7x^2 + x + 5}}$.

1) On calcule le discriminant du dénominateur, puis les deux racines et on déduit : Df = $]-\infty\,;-2[\ \cup\ ]-2\,;1[\ \cup\ ]1\,;+\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\Rightarrow$ y = 2 asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 + x - 2) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} (2x^2 - 8x + 6) = 30$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ (de la même manière)

$\Rightarrow$ x = – 2 est une asymptote verticale à Cf.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-6}{x+2} = -\frac{4}{3}$$

2) Pour tout x réel, $-1 \le \cos x \le 1$

Donc, $0 \le \cos^2 x \le 1$

Et ainsi, $-x \le \cos^2 x - x \le 1 - x$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$, donc par comparaison

$$\lim_{x \to +\infty} (\cos^2 x - x) = -\infty$$

De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ implique $\lim\limits_{x \to -\infty} (\cos^2 x - x) = +\infty$

3) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^3}{3x^3 + 7x^2 + x + 5} = 2$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{6x^3}{3x^3 + 7x^2 + x + 5}} = \sqrt{2}$