Mardi 4 Octobre

Soit f la fonction définie sur [-1 ; 1] par : $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$
. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal où l'unité de longueur est 4 cm.

1. Etudier la dérivabilité de f en (-1) et 1. En déduire les tangentes à C_f au point d'abscisse (-1) et 1.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer C_f.

CORRIGE

Etude de la dérivabilité en x = – 1 :

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(1 - x)\sqrt{(1 + x)(1 - x)}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(1 - x)\sqrt{1 - x}}{\sqrt{x + 1}} = +\infty \quad \text{car} \lim_{x \to -1} (1 - x)\sqrt{1 - x} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{et} \lim_{x \to -1} \sqrt{x + 1} = 0^+$$

On déduit que f n'est pas dérivable en x = – 1 et que C_f admet une demi tangente verticale au point d'abscisse (– 1)

Etude de la dérivabilité en x = 1 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} -\sqrt{1 - x^2} = 0$$

On en déduit que f est dérivable en x = 0, que f '(0) = 0 et donc que C_f a une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Pour tout x ∈]-1 ; 1] f est dérivable comme produit et composé de fonctions dérivables et on a :

$$f'(x) = (-1)\sqrt{1 - x^2} + (1 - x)\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2} + \frac{-x(1 - x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-(1 - x^2) - x(1 - x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Ainsi f ' est du signe de son numérateur, on calcule $\Delta = 9$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$

On déduit alors le tableau de variation ci-dessous :

x	– 1		– 0,5		+ 1
f '(x)	‖	+	0	–	0
f		↗		↘	