Jeudi 13 octobre

Contrôle n° 2

Exercice 1 : (3 points)

1. Rappeler la définition correspondant à l'égalité suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Démontrer alors le théorème de comparaison suivant :
   Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle]a ; + ∞[et telles que f(x) ≥ g(x).
   Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 2 : (3 points)

Soit f l'application de ℝ dans ℝ définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f sur ℝ.
2. Etudier la dérivabilité de f sur ℝ.

Exercice 3 : (14 points)

Partie I

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Démontrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ telle que $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de $(\mathcal{C})$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\,;\,0)$,

Q le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $\mathrm{O}PMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

   On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.
2. Le point M a pour abscisse α.

   La tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.