

Contrôle (2h)

Exercice 1 : R.O.C. (3 points)

Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Exercice 2 : Q.C.M. (3 points)

Pour chaque question une seule des réponses est exacte. Aucune justification n'est demandée. Chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise enlève 0,5. L'absence de réponse vaut 0 point.

1. L'équation : $e^{2x} + 4e^x + 3 = 0$ admet dans \mathbb{R} :

a) 0 solution	b) 1 solution	c) 2 solutions	d) plus de 2 solutions
---------------	---------------	----------------	------------------------

2. L'expression : $-e^{-x}$:

a) n'est jamais négative	b) est toujours négative	c) n'est négative que si x est positif	d) n'est négative que si x est négatif
--------------------------	--------------------------	--	--

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} =$

a) $-\frac{1}{2}$	b) 1	c) 2	d) $+\infty$
-------------------	------	------	--------------

Exercice 3 : (5 points)

1. Soit $z = -1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 + i$

Déterminer les parties réelle et imaginaire de : $z + z'$, $z \times z'$ et $\frac{z}{z'}$

2. A tout point M d'affixe $z = x + iy$, on associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ telle que :

$$z' = z^2 - 2(1 + i)z$$
 Déterminer x' et y' en fonction de x et y .

Exercice 4 : (11 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$.

a) Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$.

b) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Étudier les variations de la fonction f .

Partie B

1) On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t , est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans \mathbf{R} . La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E₁) $y' = \frac{y}{4}$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E₁).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u(t)^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u .

a) On suppose que, pour tout réel positif t , on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E₂) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4} h(t) + \frac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h .

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?