Rattrapage (2h)

***__Exercice 1 :__*** (3 points)

Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

***__Exercice 2 :__*** (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ on considère les point A(1), M(z) et M'(z').

Pour tout $z \neq 1$, on pose $z' = \dfrac{z+1}{z-1}$.

**1.** Déterminer Re(z') et Im(z') en fonction de celles de z.

**2.** **a)** Déterminer l'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe des abscisses.

**b)** Déterminer l'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe des ordonnées.

***__Exercice 3 :__*** (9 points)

On désigne par $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par $f'$ sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propositions suivantes :

(1) pour tout nombre réel $x$, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$,
(2) $f'(0) = 1$,
(3) la fonction $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**1)** **a)** Démontrer que pour tout réel $x$, $f'(x) \neq 0$.

**b)** Calculer $f(0)$.

**2)** En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel $x$, $f''(x) = f(x)$, où $f''$ désigne la fonction dérivée seconde de la fonction $f$.

**3)** On pose : $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

**a)** Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

**b)** Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

**c)** En déduire les fonctions $u$ et $v$.

**d)** En déduire que, pour tout réel $x$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

**4)** **a)** Etudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**b)** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**5)** **a)** Soit $m$ un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

***Exercice 4 :*** (5 points)

On note $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. L'unité graphique est $1$ cm.

**1. Etude des limites**

**a)** Déterminer la limite de la fonction $f$ quand $x$ tend vers $0$.

**b)** Déterminer la limite de la fonction $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**c)** Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$ ?

**2. Etude des variations de la fonction $f$**

**a)** Démontrer que la fonction dérivée de la fonction $f$ s'exprime, pour tout réel $x$ strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

**b)** Déterminer le signe de $f'$ et en déduire le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

**c)** Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée $\alpha$ appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et donner la valeur approchée de $\alpha$ arrondie au centième.

**3.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.