05 / 12 / 2011

__Exercice 1 :__ (7 points)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{v}$) *(unité : 1 cm)*. On considère les points A d'affixe – 1 et B d'affixe 4. A tout point M du plan d'affixe z distinct de A, on associe le point M′ d'affixe $z' = \frac{z-4}{z+1}$.

1- Déterminer l'affixe de C′ image de C(– 2 – i). Placer alors les points A, B, C et C′.
2- Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le point associé D′ ait pour affixe i. Placer D et D′.
3- Déterminer les **points invariants** .i.e. les points pour lesquels **z = z′**.
4- Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que M′ soit sur l'axe des réels.
5- Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M tels que M′ soit sur l'axe des imaginaires purs.

__Exercice 2 :__ (7 points)

Dans cet exercice on étudie une épidémie dans une population.

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.

Pour t appartenant à [0 ; 30], on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.

On a donc $y(0) = 0{,}01$.

On admet que la fonction y ainsi définie sur [0 ; 30] est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0{,}05y(10 - y).$$

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $z = \frac{1}{y}$.

Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions : $\begin{cases} y(0) = 0{,}01 \\ y' = 0{,}05y(10-y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0{,}5z + 0{,}05 \end{cases}$.

2. a. En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

b. Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

__Exercice 3 :__ (3 points)

Soit u une fonction dérivable sur I, montrer alors que e^u est dérivable sur I et que $(e^u)' = u'.e^u$

__Exercice 4 :__ (3 points)

Résoudre $z^4 = 1$ dans $\mathbb{C}$.