

Exercice :

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0 ; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2.
 - a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0 ; +\infty[$.
On note α cette solution.
 - b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.