Asie, juin 2007

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, les solutions de l'équation

$$E_a :\ x^a = a^x.$$

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.
2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_{e}.
   On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x - \text{e}\ln x$.
   - **a. Question de cours :** On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\text{e}^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
     Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
   - **b.** Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
   - **c.** Étudier les variations de h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - **d.** Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_{e}.

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
   - **a.** Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.
   - **b.** Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   - **c.** Dresser le tableau des variations de la fonction f.
   - **d.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. (Unité : 2 cm).
3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :
   (P_1) : si $a \in]0\,;\,1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;
   (P_2) : si $a \in]1\,;\,\text{e}[\cup]\text{e}\,;\,+\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1\,;\,\text{e}[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]\text{e}\,;\,+\infty[$.