

Contrôle 3h n° 1

Exercice 1 : (4 points)

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-t/2}$.

- 1) Déterminer deux réels a et b , tels que la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x/2}$ est solution de (E) et $f(0) = 10$.
- 2) On se propose de montrer que la fonction f trouvée précédemment est l'unique solution de (E)
 - a) Résoudre l'équation différentielle (E') définie par : $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
 - b) Montrer que g est solution de (E) si et seulement si $(g - f)$ est solution de (E').
 - c) En déduire toutes les solutions de (E').
 - d) Déterminer la solution du problème (E') vérifiant la condition initiale et conclure.

Exercice 2 : (7 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = i$; $z_C = -1 + i$; $z_D = 1 + i$.

Une figure sera faite, puis complétée au fur et à mesure de l'exercice (unité graphique : 4 cm).

- 1) Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z , $z \neq z_B$, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = i \frac{z - 2i}{z - i}$$

- a) Développer la quantité : $(z + 1 - i)(z - 1 - i)$.
- b) Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$, et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.
- 2) a) Montrer que, pour tout z différent de i :

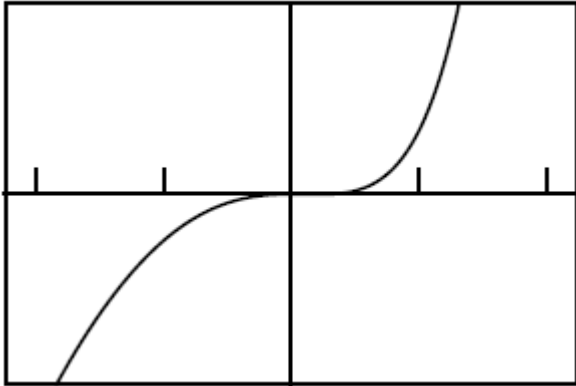
$$|z'| = \frac{AM}{BM} ; \quad \text{et que} \quad \arg(z') = (\widehat{BM}, \widehat{AM}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$$
 - b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que $|z'| = 1$
 - c) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\arg(z') = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- 3) On pose $z = x + iy$ pour tout réel x et y ;
 - a) Montrer alors que $z' = \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} + i \frac{x^2 + y^2 - 3y + 2}{x^2 + (y-1)^2}$
 - b) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que z' est réel.
- 4) a) Démontrer que pour tout z différent de i : $z' - i = \frac{1}{z - i}$
 - b) M étant un point du cercle (C) de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$, démontrer que le point M' appartient à un cercle de centre B dont on donnera le rayon.

Exercice 3 : (7 points) Inde, avril 2003

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$

Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche l'écran d'une calculatrice dans un repère orthonormal.

Conjecture :



A l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

- 1) Le sens de variation de f sur $[-3 ; 2]$
- 2) La position de la courbe par rapport à (xx') ?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A :

- 1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1$.
- 2) Etude du signe de $g(x)$ pour x réel
 - a) Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ puis quand x tend vers $-\infty$.
 - b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .
 - c) En déduire le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
 - d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans \mathbb{R} . On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$
 - e) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 3) Sens de variation de f sur \mathbb{R}
 - a) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
 - b) En déduire le sens de variation de f .
 - c) Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B :

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe (xx') .

- 1) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha + 2)}$
- 2) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $h(x) = \frac{-x^3}{2(x + 2)}$
 - a) Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0 ; 1]$, puis déterminer le sens de variation de h .
 - b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
- 3) a) Préciser alors la position de la courbe (C) par rapport à l'axe des abscisses.
b) Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Exercice 5 : (2 points)

Démontrer que si f et g sont deux fonctions dérivables alors $(f \circ g)$ est dérivable et $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x)$.