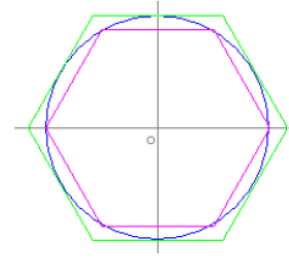


Méthode d'Archimède¹ pour approximer π .

Soit \mathcal{C} un cercle de rayon 1 ; on construit, pour tout $n \geq 1$, deux polygones réguliers P_n et Q_n , ayant 3×2^n cotés, P_n étant inscrit dans \mathcal{C} et Q_n étant exinscrit à \mathcal{C} .

Nous admettrons que le périmètre du cercle de rayon 1 est encadré par ceux des deux polygones.

Dans la suite, on note p_n et q_n les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n . Ainsi, $p_n \leq \pi \leq q_n$.



1. Le cas $n = 1$.

Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.

2. Expression de p_n et q_n .

a. Évaluer, en fonction de n , l'angle au centre qui intercepte l'un des cotés de P_n ou de Q_n .

b. En déduire les relations :

$$p_n = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad q_n = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

3. Relations de récurrence

a. On pose $\alpha = \frac{\pi}{3 \times 2^{n+1}}$.

Exprimer p_n et q_n en fonction de n et α .

b. Exprimer $\sin(2\alpha)$ et $1 + \cos(2\alpha)$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

c. En déduire que, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n} \right) \quad \text{et} \quad p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}.$$

d. Calculer p_2 et q_2 à l'aide des relations précédentes.

4. Etude des suites (p_n) et (q_n) .

a. Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leq a \leq b$.

Démontrer les relations :

$$0 \leq \sqrt{ab} \leq b \quad \text{(i)} \quad \text{et} \quad a < \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} < b \quad \text{(ii)}.$$

b. Montrer par récurrence que $p_n < q_n$.

c. En déduire que la suite (p_n) est croissante et la suite (q_n) est décroissante.

d. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$: $q_{n+1} - p_{n+1} \leq \frac{1}{2}(q_n - p_n)$. [on pourra utiliser

(i) et (ii)]

En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $q_n - p_n \leq \frac{1}{2^n}$, puis que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes.

e. Que valent $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$?

¹ Archimède de Syracuse (287-212 av. J.C)