1. Factorielle d'un entier naturel.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle <u>factorielle de *n*</u> l'entier noté $n!$ défini par :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n \text{ si } n \geqslant 1 \text{ et } 0! = 1$$

Par exemple, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Le but de cette première partie est de se familiariser avec les factorielles. (Les quatre questions sont indépendantes)

a. Calculer 4!, 5! et 6!. Démontrer que $6! \times 7! = 10!$ (sans calculer 10! et sans utiliser de calculatrice)

b. Simplifier $\dfrac{(n+1)!}{n!}$.

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $k! \geqslant 2^{k-1}$

d. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que :

$$n! \geqslant 10^7$$

2. Étude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

a. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c. Le but de cette question est de prouver que (u_n) est majorée.

(i) Démontrer que : $$u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

(ii) Démontrer que : $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(iii) En déduire que (u_n) est majorée par 3.

d. En déduire que la suite (u_n) converge. (On ne demande pas de calculer sa limite)

3. Étude de deux suites adjacentes.

Dans cette partie, on prouve que deux suites sont adjacentes puis que leur limite est un nombre irrationnel.

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

La suite (u_n) est celle définie dans la partie 2.

a. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ est strictement décroissante.

En déduire que les suites $(u_n)_{n \geqslant 2}$ et $(v_n)_{n \geqslant 2}$ sont adjacentes.

On note ℓ leur limite commune.

b. Donner une valeur approchée, par défaut, de ℓ à 10^{-7} près (justifier). (On pourra utiliser la question 1.d.)

c. Dans cette question, on suppose $\ell \in \mathbb{Q}$. Autrement dit : il existe des entiers p et q ($\neq 0$) tels que $\ell = \dfrac{p}{q}$.

(i) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_n < \ell < v_n$$

On a donc, en particulier : $$u_q < \frac{p}{q} < v_q$$

(ii) Démontrer qu'il existe un entier a tel que :

$$\frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a}{q!} + \frac{1}{q!}$$

(ii) Démontrer que : $$a < p(q-1)! < a+1$$

(iv) En déduire une contradiction et conclure.

<u>Information</u> : on montrera plus tard dans l'année, que la limite ℓ des suites (u_n) et (v_n) n'est autre que le nombre **e** = exp(1) où "exp" désigne la fonction exponentielle.

1. Factorielle d'un entier naturel.

a. $4! = 24$; $5! = 120$ et $6! = 720$.

$$6! = 2\times3\times4\times5\times6 = 2\times3\times4\times5\times(2\times3) = (2\times4)\times(3\times3)\times(5\times2) = 8\times9\times10$$

D'où : $$6!\times7! = 7!\times8\times9\times10 = 10!$$

b. $\dfrac{(n+1)!}{n!} = \dfrac{n!(n+1)}{n!} = n+1$

c. On considère la propriété $\wp$, définie pour $k \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\wp(k) : k! \geqslant 2^{k-1}$$

- Comme $1! = 1$ et $2^{1-1} = 2^0 = 1$, on a $\wp(1)$. Donc $\wp$ est initialisée au rang 1.
- Montrons que $\wp$ est héréditaire à partir du rang 1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\wp(m)$:

$$m! \geqslant 2^{m-1}$$

En multipliant par $(m+1)$, on obtient :

$$m!\times(m+1) \geqslant (m+1)2^{m-1}$$

$$(m+1)! \geqslant (m+1)2^{m-1}$$

Et comme $m+1 \geqslant 2$: $$(m+1)! \geqslant 2\times2^{m-1}$$

$$(m+1)! \geqslant 2^m$$

D'où $\wp(m+1)$.

La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 1.

Du principe de raisonnement par récurrence, on en déduit que la propriété $\wp$ est vraie à tout rang $k \in \mathbb{N}^*$.

D'où le résultat.

d. On a $10! = 3\,628\,800$ et $11! = 39\,916\,800$. L'entier recherché est $n = 11$.

2. Étude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

a. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{5}{2}$ et $u_3 = u_2 + \dfrac{1}{3!} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{8}{3}$.

b. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

Donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

c. (i) On a vu (partie 1, question c) que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$k! \geqslant 2^{k-1}$$

Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit :

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

En ajoutant 1, il vient :

$$u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$

(ii) La quantité $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On a donc (le premier terme de la somme étant égal à 1) :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

(iii) D'après (i) et (ii), on déduit déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant 1 + 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Et comme $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 1$, il vient : $u_n \leqslant 3$

La suite (u_n) est majorée par 3.

d. La suite (u_n) est (strictement) croissante et majorée, donc elle converge.

3. Étude de deux suites adjacentes.

a. $v_0 = u_0 + 1 = 2$, $v_1 = u_1 + 1 = 3$, $v_2 = u_2 + \frac{1}{2} = 3$ et $v_3 = u_3 + \frac{1}{6} = \frac{17}{6} \simeq 2{,}86$ à 10^{-2} près.

Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{-n+1}{(n+1)!}$$

Et comme $n \geqslant 2$, on a : $v_{n+1} - v_n < 0$

La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante sur $[\![2, +\infty[\![$.

Par ailleurs, on a vu dans la partie 2 que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n}$$

D'où, par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

On en déduit que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

Elle convergent donc vers une limite commune ℓ.

b. D'après le théorème des suites adjacentes, on a pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

Donc : $$0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{1}{n!}$$

En choisissant $n = 11$, on aura (d'après 1.d.) :

$$0 \leqslant \ell - u_{11} \leqslant 10^{-7}$$

La distance entre ℓ et u_{11} est bien inférieure à 10^{-7}.

Comme $u_{11} \leqslant \ell$, u_{11} est une valeur approchée de ℓ à 10^{-7} près.

La calculatrice donne :

$$u_{11} = \sum_{k=0}^{11} \frac{1}{k!} = \frac{13563139}{4989600} \simeq 2{,}7182818 \text{ à } 10^{-7} \text{ près par défaut}$$

c. Dans cette question, on suppose $\ell \in \mathbb{Q}$. Autrement dit : il existe des entiers p et q ($\neq 0$) tels que $\ell = \dfrac{p}{q}$.

(i) La monotonie des suites (u_n) et (v_n) est stricte.

D'après le théorème des suites adjacentes, on a donc pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n < u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} < v_n$$

D'où, pour tout entier $n \geqslant 2$: $u_n < \ell < v_n$

En particulier, pour $n = q$, et avec l'hypothèse $\ell = \dfrac{p}{q}$, cela donne :

$$u_q < \frac{p}{q} < v_q$$

(ii) On sait que : $$u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!}$$

Les dénominateurs de toutes les fractions divisent $q!$. En réduisant au même dénominateur, u_q s'écrit bien $u_q = \dfrac{a}{q!}$ où a est un certain entier. Et comme $v_q = u_q + \dfrac{1}{q!}$, il vient :

$$\frac{a}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a}{q!} + \frac{1}{q!}$$

(ii) Il suffit de multiplier chaque membre de l'encadrement ci-dessus par $q!$ pour obtenir :

$$a < p(q-1)! < a + 1$$

(iv) D'une part, $p(q-1)!$ est un entier. D'autre part, a et $a + 1$ sont deux entiers consécutifs. Or, il ne peut pas y avoir d'entier strictement compris entre deux entiers consécutifs.

L'encadrement $a < p(q-1)! < a + 1$ est donc impossible.

En conséquence, l'hypothèse de départ, à savoir $\ell \in \mathbb{Q}$, est fausse.

Donc ℓ est un irrationnel.

Pour la suite des événements, se souvenir de ce résultat :

> La suite (u_n) définie par
>
> $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
>
> converge vers un nombre environ égal à 2,7182818. Ce nombre est un irrationnel.