Term. S4 Lundi 28 septembre

Contrôle N° 1

Exercice 1 : (3 points)

1. **1.** Rappeler la définition correspondant à l'égalité suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. **2.** Démontrer alors le théorème de comparaison suivant :
   Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle]a ; + ∞[et telles que $f(x) \geq g(x)$.
   Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 2 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur [0 ; 2] par $f(x) = x.E(x)$, où E désigne la fonction partie entière.

1. Etudier la continuité de f sur son intervalle de définition.

2. Donner sa représentation graphique dans un repère orthogonale $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 3 : (6 points)

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ et Cf sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Etudier la dérivabilité de f en 1. En faire une interprétation graphique.

3. Déterminer la limite de f en + ∞.

4. Etudier les variations de f sur]2 ; + ∞[

5. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à Cf en + ∞.

Exercice 4 : (8 points)

1. On considère la fonction polynôme P définie pour tout x réel par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

a) Etudier les variations de P.

b) Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule notée α.
Donner un encadrement à 10^{-2} près de α.

c) En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

2. On note $I =]-1 ; +\infty[$ et on considère la fonction numérique f définie sur I par :

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}.$$

On désigne par Cf sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on prendra 4 cm comme unité).

a) Déterminer les limites de f aux bornes de I.

b) Etudier les variations de f (on pourra utiliser les résultats de 1.) et dresser le tableau des variations de f.

c) Ecrire une équation de la droite (D) tangente à la courbe Cf au point d'abscisse 0.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. $\forall$ M $\in$ $\mathbb{R}$, il existe A $\in$ $\mathbb{R}$ tq x > A $\Rightarrow$ f(x) > M (version abrégée)

2. $\forall$ M $\in$ $\mathbb{R}$, il existe A $\in$ $\mathbb{R}$ tq x > A $\Rightarrow$ g(x) > M, f(x) > g(x) $\Rightarrow$ f(x) > M (re-version abrégée)

Exercice 2 :

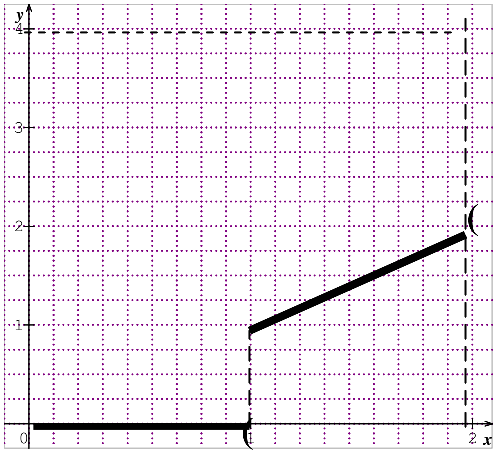
1. $\begin{cases} \text{si } x \in [0\,,1[: f(x) = 0 \\ \text{si } x \in [1\,,2[: f(x) = x \\ \text{si } x = 2 : f(2) = 4 \end{cases}$ donc f est continue sur [0 ; 1[et sur [1 ; 2[.

Reste à étudier la continuité en x = 1 et x = 2 :

x = 1 : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$ et f(1) = 1 donc f n'est pas continue en x = 1

x = 2 : $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$ et f(2) = 4 donc f n'est pas continue en x = 2.

2.



Exercice 3 :

1. f est définie pour tout réel x tel que : $x^2 - 3x + 2 \geq 0$:

Soit $\Delta = 1$ et $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, donc Df =] – ∞ ; 1] ∪ [2 ; + ∞[

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x - 2}{x - 1}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} (x - 2) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0^-$

Ainsi f n'est pas dérivable en x = 1 et Cf admet une demi tangente verticale en A(1 ; 0)

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ avec $X = x^2 - 3x + 2$

4. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc pour tout x ∈] - ∞ ; 1[∪]2 ; + ∞[: $f'(x) = \dfrac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 2}} > 0$

Ainsi f '(x) > 0 ∀ x ∈]2 ; + ∞[et donc f est croissante sur cet intervalle.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x - \frac{3}{2})) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - (x - \frac{3}{2}))$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - (x - \frac{3}{2}))(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + (x - \frac{3}{2}))}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + (x - \frac{3}{2})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - (x - \frac{3}{2})^2}{\sqrt{\quad} + (x - \frac{3}{2})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + (x - \frac{3}{2})} = 0$$

Ce qui prouve que $y = x - \frac{3}{2}$ est bien asymptote à Cf en $+\infty$.

Exercice 4 :

1. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

a) P est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme et $\forall x \in \mathbb{R}$: $P'(x) = 6x^2 - 6x$
Soit $P'(x) = 6x(x - 1)$
On en déduit le tableau ci-contre grace aux signes du trinômes.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
P'		+	0	−	0	+	
P	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

b) D'après le tableau de variation, on a :
. $\forall x \in]-\infty ; 1]$: $P(x) \le -1$
donc $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.
. si $x \in]1 ; +\infty[$:
P est continue,
$P(1) = -2 < 0$ et $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty > 0$, donc 0 appartient à l'intervalle image
Donc, par le TVI, $P(x) = 0$ a des solutions sur $]1 ;+\infty[$.
De plus, P est strictement croissant sur $]1 ; +\infty[$ et donc il existe une unique solution α à $P(x) = 0$ sur l'intervalle considéré et donc sur $\mathbb{R}$par ce qui précède.

A la calculatrice : $\left.\begin{matrix} P(1) = -2 \\ P(2) = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \in]1 ; 2[$ $\quad \left.\begin{matrix} P(1{,}6) \approx -0{,}49 \\ P(1{,}7) \approx 0{,}16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \in]1{,}6 ; 1{,}7[$

$\left.\begin{matrix} P(1{,}67) \approx -0{,}05 \\ P(1{,}68) \approx 0{,}02 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha \in]1{,}67 ; 1{,}68[$.

c) D'après le tableau de variation on peut déduire le tableau de signes ci-contre :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Sgn (P)		−	0	+	

2. $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}$

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x^3} = 0$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \to -1} (1 - x) = 2$ et $\lim_{x \to -1^+} (1 + x^3) = 0^+$

b) f est dérivable sur I car c'est une fonction rationnelle et $\forall x \in I$:

$$f'(x) = \frac{-1(1 + x^3) - (1 - x)(3x^2)}{(1 + x^3)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1 + x^3)^2}$$

On reconnaît alors $f'(x) = \frac{P(x)}{(1 + x^3)^2}$ et donc f ' est du signe de P puisque le dénominateur est un carré donc toujours positif.

On a alors le tabelau de variation suivant :

x	-1		α		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	0

c) $f'(0) = -1$
$f(0) = 1$
$\Rightarrow$ (T) : $y = -x + 1$