DM Révision
Février

Exercice 1 :

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.
Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée en annexe, page 6.

1. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose I$=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

b) Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\ ;1\ ]$.
On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \dfrac{\ln 2}{n+1}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4. *a.* Établir que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.
   En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.
   b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

Exercice 3 :

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.

a. Etudier les variations de f sur $[0; 20]$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.

c. On donne ci-dessous la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthogonal. Représenter à l'aide de ce graphique les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sur l'axe des abscisses.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.

On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1)\ :\ z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Etudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interprétez le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?