La Fonction exp.

I. L'équation différentielle : y' = y avec y(0) = 1

1. Construction d'une solution

   Sujet n° 021 : La méthode d'Euler

2. LE théorème, définition

   On nome exponentielle la solution de l'équation différentielle : $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$

II. La fonction exponentielle

1. Propriétés algébriques

   $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$; $e^{a+b} = e^a.e^b$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^n = e^{n.a}$;

   $\forall\, x \in \mathbb{R} : e^x > 0$

2. Etude de la fonction

   Exp est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

   $(e^x)' = e^x$

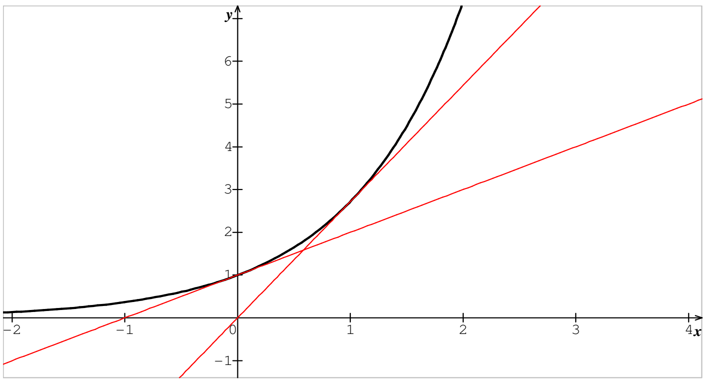
   exp est croissante sur $\mathbb{R}$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

   Tangente en $x = 0$: $y = x + 1$

   en $x = 1$: $y = ex$



3. Compléments

   Sur les limites :

   $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} x.e^x = 0$$

   Fonctions composées : $(e^u)' = u'.e^u$

III. Equations différentielles

1. Equation sans second membre

   Soit $a \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' = ay$ admet pour unique solution les fonctions définies par : $y = C.e^{ax}$ ($C \in \mathbb{R}$).

   L'équation $y' = ay$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$ admet une unique solution

2. Equation avec second membre

   Soit $a,b \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' = ay + b$ admet pour solutions les fonctions de la forme : $y = C.e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ ($C \in \mathbb{R}$).

   Unicité de la solution de l'équation différentielle avec une condition initiale.