

Contrôle N° 2

Exercice 1 : (6 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{3x}$.

1. Déterminer la valeur du nombre réel a de sorte que la fonction $g(x) = ae^{3x}$ soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation (E₀) : $y' + 2y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $(f - g)$ est solution de (E₀).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la solution de (E) qui vaut 0 en 1.

Exercice 2 : (4 points)

L'objet de cette question est de démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

On supposera connu les résultats suivants :

- Le fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa fonction dérivée.
- $e^0 = 1$.
- Pour tout réel x , on a $e^x > x$.
- Soient deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[A ; +\infty[$ où A est un réel positif.

Si pour tout $x \in [A ; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

1. On considère la fonction ψ définie sur $[0 ; +\infty[$ par $\psi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $\psi(x) \geq 0$.

2. En déduire le résultat cherché.

Exercice 3 : (7 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + (1-x)e^{2x})$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à (C) .

Etudier les positions relatives de (C) par rapport à Δ .

2. Montrer que f est dérivable sur \mathbf{R} et calculer $f'(x)$.

3. Soit u la fonction définie sur \mathbf{R} par $u(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$.

a) Etudier le sens de variation de u .

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Déterminer une valeur décimale approchée par excès de α à 10^{-2} près.

c) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

4. Etudier le sens de variation de f , puis dresser son tableau de variation.

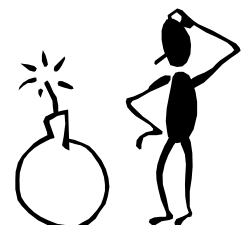
5. Construire la courbe (C) .

Exercice 4 : (3 points)

Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

1. Calculer $h'(x)$, $h''(x)$ et $h'''(x)$. En déduire le signe de h sur $[0 ; +\infty[$

2. A l'aide de 1., montrer que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$: $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$



CORRIGE

Exercice 1 :

1. g solution de (E) $\Leftrightarrow g'(x) + 2g(x) = e^{3x}$

On pose $g(x) = ae^{3x}$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $g'(x) = 3a.e^{3x}$ et ainsi, on a :

$$3a.e^{3x} + 2a.e^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow 5a.e^{3x} = e^{3x} \Leftrightarrow 5a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5} \text{ et alors } g(x) = \frac{1}{5} e^{3x}$$

2. $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$

Alors $y = C.e^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. f solution de (E) $\Leftrightarrow f' + 2f = e^{3x}$

$$\Leftrightarrow f' + 2f = g' + 2g \text{ car } g' + 2g = e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow f' - g' + 2f - 2g = 0$$

$$\Leftrightarrow (f - g)' + 2(f - g) = 0$$

$$\Leftrightarrow (f - g) \text{ solution de } (E_0)$$

4. f solution de (E) $\Leftrightarrow f(x) - g(x) = C.e^{-2x}$ soit $f(x) = \frac{1}{5} e^{3x} + C.e^{-2x}$

5. $f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}e^3 + Ce^{-2} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{5}e^5$ et alors $f(x) = \frac{1}{5}(e^{3x} - e^{5-2x})$

Exercice 2 :

1. $\psi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ est une fonction dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $\psi'(x) = e^x - x$.

Or, d'après les rappels on sait que $e^x > x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve que $\forall x \in [0 ; +\infty[: \psi(x) \geq 0$.

2. Ainsi $\forall x \geq 0, e^x \geq \frac{x^2}{2}$

et donc par le rappel sur le théorème des gendarmes comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$, on a bien :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Exercice 3 :

1.a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(x + (1-x)e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}(x + e^{2x} - x.e^{2x}) = -\infty$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}X.e^X = 0 \text{ avec } X = 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(x + (1-x)e^{2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}e^{2x}\left(\frac{x}{e^{2x}} + 1 - x\right) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{2x}} + 1 - x\right) = -\infty \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$$

b) $f(x) - \frac{x}{2} = (1-x)e^{2x} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - x.e^{2x}) = 0$ par ce qui précède.

Donc Δ est bien asymptote à (C) en $-\infty$ (mais pas en $+\infty$!!)

$(1-x)e^{2x}$ est du signe de $(1-x)$, soit : $(1-x)e^{2x} \geq 0$ si $x \leq 1$

On déduit alors : $x \in]-\infty ; -1[: (C)$ est au dessus de Δ

$x \in]-1 ; +\infty[: (C)$ est au dessous de Δ

2. f est dérivable sur \mathbb{R} comme produit addition et de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1}{2}(1 + (-1)e^{2x} + (1-x)(2e^{2x}))$$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{1}{2}(1 + (1-2x)e^{2x})$$

3. $u(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$

a) u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = (1-2x)(2e^{2x}) + (-2)e^{2x}$

$$\text{Soit } u'(x) = (-4x)e^{2x}$$

Ainsi u' est du signe de $(-4x)$

On en déduit le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u'	$+$	0	$-$
u	1	2	$-\infty$

b) u est continue sur \mathbb{R} , $0 \in]u(1); u(0)[$

et comme u est strictement monotone,

il existe un unique $\alpha \in]0; 1[$ tq $u(\alpha) = 0$

à la calculatrice : $u(0) = 2$ $u(1) \approx -6,4$

$$u(0,6) \approx 0,3 \quad u(0,7) \approx -0,6$$

$$u(0,63) \approx 0,08 \quad u(0,64) \approx -0,0007 \Rightarrow \alpha = 0,64 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par excès}$$

c) D'après les variations de u , on

déduit le tableau de signes ci-contre :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$\text{Sgn}(u)$	$+$	0	$-$

4. Soit $f'(x) = \frac{1}{2}(1 + (1-2x)e^{2x})$

$$= \frac{1}{2}u(x)$$

Ainsi f' et u sont de même signe, d'où le tableau ci-contre :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

5. Voir écran calculatrice.

Exercice 4 :

1. $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$

$$h'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[$$

$$h''(x) = -\sin x + x \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[$$

$$h'''(x) = -\cos x + 1$$

Alors $\forall x \geq 0, h'''(x) \geq 0$ et donc h'' est croissante, comme $h''(0) = 0$, on déduit que

$\forall x \geq 0, h''(x) \geq 0$ et donc h' est croissante, comme $h'(0) = 0$, on déduit que

$\forall x \geq 0, h'(x) \geq 0$ et donc h est croissante, comme $h(0) = 0$, on déduit que :

$$\forall x \geq 0, h(x) \geq 0$$

$$\text{c'est-à-dire que } \forall x \in [0; +\infty[, \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0.$$

2. D'après ce qui précède : $\frac{x^3}{6} \geq x - \sin x$

mais aussi, d'après l'étude de h'' : $\sin x - x \geq 0 \forall x \in [0; +\infty[.$

Finalement pour tout $x \in [0; +\infty[: 0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$