

Devoir maison n°2 (pour lundi 21 septembre)

Exercice 1 :

Démontrer le théorème des gendarmes dans le cas suivant :

« f, u et v représentent trois fonctions et l un nombre réel. Si pour x très grand on a :

$$u(x) \leq f(x) \leq v(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l,$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l. \text{ »}$$

Exercice 2 :

Pour tout x réel non nul, on pose $\phi(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{2}$.

Existe-t-il une valeur L telle que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{si } x \neq 0 \\ L, & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ soit continue sur } \mathbb{R} ?$$

CORRIGE

Exercice 1 : Le théorème des gendarmes (ROC) dit aussi (dans une version culinaire) le théorème du sandwich...

On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = L$ avec $L \in \mathbb{R}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = L$

Alors tout intervalle ouvert contenant L contient tous les $u(x)$ pour x suffisamment grand, mais aussi tous les $v(x)$ pour x suffisamment grand.

Comme, de plus, on a : $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$,

Il s'en suit que tout intervalle ouvert contenant L contient tous les $u(x)$ et $v(x)$ et donc tous les $f(x)$ pour x suffisamment grand. Ce qui prouve : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Exercice 2 :

ϕ est définie et continue sur \mathbb{R}^* . f est définie sur \mathbb{R} , et, est continue sur \mathbb{R}^* .

Pour que f soit continue en $x = 0$, il faut :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \phi(x)$.

Etudions alors $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x)$:

On pose $X = \frac{\pi}{x}$, il s'en suit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi \times \sin X}{X} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{De même, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \phi(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi \times \sin X}{X} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

Il suffit alors de poser $L = -\frac{\pi}{2}$ et alors f ainsi définie est continue sur \mathbb{R} .