

## GROS DM

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$ .

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

Pour tout l'exercice on pourra admettre ou démontrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0.$$

**Partie I :**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1. Etudier les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Calculer la dérivée de  $g$  et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variation de  $g$ .
4. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .  
Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .
5. En déduire le signe de  $g$ .

**Partie II :**

1. Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Déterminer  $f'(x)$  pour tout  $x$  réel.
3. En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de  $f$  et donner son tableau de variation.
4. Démontrer que  $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$
5. Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .  
Préciser la position de  $(C)$  par rapport à  $\Delta$ .
6. Donner une équation de la tangente  $T$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0.
7. Tracer  $\Delta$ ,  $T$  puis  $(C)$ .

## CORRIGE DM4 (Gros DM)

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$$

### Partie I :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^x} - 2 \frac{x}{e^x} + 2 \frac{1}{e^x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

2.  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{pour tout } x \in \mathbb{R} : g'(x) &= -((2x - 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 2)(-e^{-x})) \\ &= (x^2 - 4x + 4)e^{-x} \\ &= (x - 2)^2 e^{-x} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ , comme un carré est toujours positif, on déduit le tableau ci-contre :

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$+$
$g$	$-\infty$	$\nearrow$	$1$

4.  $g$  continue,  $0 \in$  intervalle image, donc par TVI

$g(x) = 0$  a des solutions sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,  $g$  monotone croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc l'équation admet une unique solution  $\alpha$ .

A la calculatrice :  $g(0,35) \approx -0,002$  et  $g(0,36) \approx 0,0165 \Rightarrow \alpha = 0,35$  à  $10^{-2}$  près par défaut.

5. D'après les variations de  $f$ , on déduit le tableau de signes ci-contre :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
Sgn ( $g(x)$ )	$-$	$0$	$+$

### Partie II :

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{x^2}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} (x \cdot e^x - e^{-x} + x^2 + 2) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0 \quad \text{et donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^x - e^{-x} + x^2 + 2) = +\infty$$

2.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , comme composée et produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : f'(x) &= 1 + 2x \cdot e^{-x} + (x^2 + 2)(-e^{-x}) \\ &= 1 - (x^2 - 2x + 2) \cdot e^{-x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

3. On déduit alors que le signe de  $f'$  est celui de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a donc le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f$	$+\infty$	$\searrow$ $f(\alpha)$	$\nearrow$ $+\infty$

4.  $f(\alpha) = \alpha - 1 + (\alpha^2 + 2).e^{-\alpha}$

Or  $g(\alpha) = 0$ , soit  $1 - (\alpha^2 - 2\alpha + 2).e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^2.e^{-\alpha} + 2\alpha.e^{-\alpha} - 2.e^{-\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 2.\alpha.e^{-\alpha} = \alpha^2.e^{-\alpha} + 2.e^{-\alpha}$

$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2).e^{-\alpha} = 1 + 2\alpha.e^{-\alpha}$

Il s'en suit que  $f(\alpha) = \alpha - 1 + 1 + 2\alpha.e^{-\alpha}$   
 $= \alpha(1 + 2.e^{-\alpha})$

5.  $f(x) - (x - 1) = (x^2 + 2)e^{-x}$

D'après ce qui précède,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)e^{-x} = 0$  et donc  $y = x - 1$  est

bien asymptote oblique à C en  $+\infty$ .

D'autre part,  $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 + 2)e^{-x} > 0$  ce qui justifie que (C) est toujours au dessus de  $\Delta$ .

6.  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$\Rightarrow y = -1(x - 0) + 1 \Leftrightarrow (T) : y = -x + 1$

7.

