DM 2 : N°107 p 91

Somme et Produit des racines :

1. Cas général :

Pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$.

On suppose $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les racines de f.

a) Exprimer la somme $S = x_1 + x_2$ et le produit $P = x_1.x_2$ en fonction de a, b et c.

b) Dans le cas où $P < 0$, que peut-on dire du signe de x_1 et x_2 ?

c) Dans le cas où $P > 0$, que peut-on dire du signe de x_1 et x_2 selon le signe de S ?

2. Applications

Dans chaque cas, on pourrait aisément s'assurer que $\Delta > 0$, mais on répondra aux questions posées, sans utiliser Δ .

a) Pour tout réel x, $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

. Vérifier que 1 est une racine de f.

. En déduire la deuxième racine de f.

b) Pour tout réel x, $f(x) = -5x^2 + 3x + 1$.

Sans calculer les racines de f, déterminer leur signe.

c) Pour tout réel x, $f(x) = x^2 - 6x + 7$.

Sans calculer les racines de f, déterminer leur signe.

Correction DM n°2, n°107p91

1. $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, $\Delta > 0$, α et β les deux racines.

(Rmq : on note α et β au lieu de x_1 et x_2 pour des commodités d'écritures.)

a) $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

soit, $f(x) = a(x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta)$

$= ax^2 + (-a\alpha - a\beta)x + a\alpha\beta$

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, il apparaît donc :

$$\begin{cases} a = a \\ -a\alpha - a\beta = b \\ a\alpha\beta = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases} \quad \text{Finalement : } \begin{cases} S = \dfrac{-b}{a} \\ P = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

b) Si P est négatif alors α et β sont de signes contraires.

c) Si P est positif alors α et β sont de même signe. Si de plus :

$S > 0$, alors α et β sont positifs tous les deux.

$S < 0$, alors α et β sont négatifs tous les deux.

2. Applications :

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

. $f(1) = 3(1)^2 + 2(1) - 5 = 0$. Donc $\alpha = 1$ est une racine de f.

. D'après 1., $\alpha\beta = \dfrac{-5}{3}$, comme $\alpha = 1$ on en déduit que $\beta = \dfrac{-5}{3}$.

b) $f(x) = -5x^2 + 3x + 1$.

$P = \alpha\beta < 0$ ($P = \dfrac{-1}{5}$) donc d'après 1.b) α et β sont de signes contraires. On peut donc dire que f a une racine négative et une positive.

c) $f(x) = x^2 - 6x + 7$.

$P > 0$, donc α et β de même signe. De plus $S = 6 > 0$, donc les deux racines de f sont positives.

3. Ah ben non c'est déjà fini…