

Devoir Maison
 récapitulatif 1^{ière} période
Exercice 1 :

f est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = x^2 + 2x$

1. a) Quel est le sens de variation de f sur \mathbb{R}_+ ?
 b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.
2. g est la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = -1 + \sqrt{1+x}$.
 a) Quel est le sens de variation de g sur \mathbb{R}_+ ?
 b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$.
3. Sur quel intervalle peut-on définir $g \circ f$? Calculer alors $(g \circ f)(x)$.
4. Sur quel intervalle peut-on définir $f \circ g$? Calculer alors $(f \circ g)(x)$.
5. Tracer, dans un même repère orthonormal, la courbe C_f représentant f, la courbe C_g représentant g, et la droite Δ d'équation $y = x$.
 Déterminer alors la position de C_f et C_g par rapport à Δ .

Morale : A voir ensemble en classe...

Exercice 2 :

ABC est triangle rectangle en A tel que $AB = 3$, $AC = 4$, et M est un point de $[BC]$. On appelle P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$.

Comment placer M pour que l'aire du rectangle APMQ soit maximale ?

Indication : Non, finalement ça ne doit pas être utile...

Exercice 3 :

ABC est un triangle, I est le point de (AB) tel que $2\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$, G est le point de (IC) tel que $\vec{GI} + 3\vec{GC} = \vec{0}$. La droite (AG) coupe la droite (BC) en H.

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point H sur la droite (BC) .

1. Faites une figure **précise**.
2. Justifier que I est le barycentre de $\{(A ; 2), (B ; -1)\}$ et que G est le barycentre de $\{(I ; 1), (C ; 3)\}$.
 En déduire que G est le barycentre de $\{(A ; 2), (B ; -1), (C ; 3)\}$
3. On note K le barycentre de $\{(B ; -1), (C ; 3)\}$
 a) Justifier l'appartenance de K aux droites (BC) et (AG) .
 b) En déduire que $K = H$, puis la valeur du nombre réel k tel que $\vec{BH} = k \cdot \vec{BC}$

CORRIGE DM récapitulatif 1^{ière} période.

Exercice 1 :

1. a) Sur \mathbb{R}_+ , $h(x) = x^2$ et $j(x) = 2x$ sont croissantes, comme la somme de deux fonctions croissantes est croissante, f est croissante sur \mathbb{R}_+ .

b) $x > 0 \Rightarrow 2x > 0$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, on a bien : $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$.

2. a) Sur \mathbb{R}_+ : $k(x) = 1 + x$ et $l(x) = \sqrt{x}$ sont croissantes, donc leur composée aussi et donc g est croissante sur \mathbb{R}_+ . (car $g(x) = l(k(x)) - 1$ a même variation que $l(k(x))$).

b) $\forall x \geq 0, 1 + x \geq 1$, donc $\sqrt{1+x} \geq 1$ et donc $g(x) \geq 0$.

3. $g \circ f$ est définie pour tout x tel que $f(x) \geq -1$

Soit $x^2 + 2x \geq -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$ ce qui est toujours vrai, donc $g \circ f$ peut être définie sur \mathbb{R} .

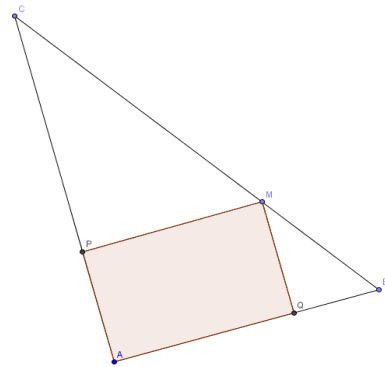
Or f n'est définie que sur \mathbb{R}_+ , donc $g \circ f$ aussi et $g \circ f(x) = g(f(x)) = -1 + \sqrt{1 + (x^2 + 2x)} = -1 + \sqrt{(1+x)^2} = -1 + |1+x|$
Comme $x \geq 0$, on déduit que $g \circ f(x) = x$

4. $f \circ g$ est définie pour tout x tel que $1 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; +\infty[$.

Comme g n'est définie que sur \mathbb{R}_+ , $f \circ g$ aussi et $f \circ g(x) = (-1 + \sqrt{1+x})^2 + 2(-1 + \sqrt{1+x}) - 1 = x$

5. Voir l'écran de sa calculatrice adorée.

Les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à Δ .



Exercice 2 :

Soit x la longueur BM , alors MBQ est un triangle rectangle et :

* Le théorème de Thalès donne : $\frac{MQ}{AC} = \frac{BM}{BC} = \frac{BQ}{BA}$

Soit $\frac{MQ}{4} = \frac{x}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$ (en calculant BC avec Pythagore dans ABC)

Finalement $MQ = \frac{4x}{5}$

* On applique à nouveau Thalès : $\frac{CP}{CA} = \frac{CM}{CB} = \frac{MP}{AQ}$ soit $\frac{5-x}{5} = \frac{MP}{3}$

Finalement $MP = 3 - \frac{3x}{5}$

* On peut alors calculer l'aire du quadrilatère $AQMP$: $A(x) = MQ \times MP = \frac{4x}{5} \times \frac{15-3x}{5}$

Soit $A(x) = \frac{1}{25}(-12x^2 + 60x) = \frac{12}{25}(-x^2 + 5x)$
 $= \frac{12}{25}x(5-x)$

Les deux racines sont donc 0 et 5 et ainsi le maximum (puisque $a < 0$) est en $x = \frac{5}{2}$ et $A = 3$ ua

Exercice 3 :

2. Par définition $2\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$, signifie que I est le barycentre de $\{(A; 2), (B; -1)\}$

De même pour G barycentre de $\{(I; 1), (C; 3)\}$.

Par associativité, on déduit G est alors barycentre

de $\{(A; 2), (B; -1), (C; 3)\}$.

3. a) Soit K le barycentre de $\{(B; -1), (C; 3)\}$ alors $K \in (BC)$

et G est alors barycentre de $\{(A; 2), (K; 2)\}$ et donc

G, K et A sont alignés, soit $K \in (AG)$.

Ainsi K est le point d'intersection de (AG) et (BC) .

b) Ceci justifie que $K = H$ (par définition de H) et on a : $\vec{BH} = \frac{3}{2}\vec{BC}$

