Term. S4 **Jeudi 12 novembre**

DM n°5

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$.

1. **a)** Déterminer les limites de φ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b) Etudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$,dont l'une dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$, qui sera noté α.
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : Position relative de deux courbes

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont notées C_f et C_g.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A (0 ; 1) et admettent en ce point la même tangente.
2. **a)** Démontrer que, pour tout nombre réel x :
   $$f(x) - g(x) = \frac{(2x + 1)\ \varphi(x)}{x^2 + x + 1}$$
   où φ est la fonction étudiée dans la partie A.
   b) A l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire la position relative des courbes C_f et C_g .

CORRIGE

Partie A : $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + e^{-x} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = +\infty$

b) φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x} = (-x^2 + x)e^{-x}$

Ainsi φ' est du signe de $(-x^2 + x) = x(-x + 1)$

D'où le tableau ci-contre :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	0	$-$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\varphi(1)$	$\searrow$	-1

2. On a : φ continue sur $[1 ; +\infty[$,

$\varphi(1) = \frac{3}{e} - 1 \approx 0,10$

$0 \in]-1 ; \varphi(1)]$ intervalle image

Par le TVI, $\varphi(x) = 0$ a des solutions sur $[1 ; +\infty[$

De plus φ est monotone décroissante sur cet intervalle donc l'équation admet une unique solution α.

A la calculatrice : $\varphi(2) \approx -0,05 \Rightarrow 1 < \alpha < 2$ $\varphi(1,7) \approx 0,02$ et $\varphi(1,8) \approx -0,001$

$\varphi(1,79) \approx 0,0007 \Rightarrow 1,79 < \alpha < 1,80$

Le tableau de variation montre clairement que $\varphi(x) = 0$ admet une deuxième solution sur $\mathbb{R}$ ($x = 0$) et aucune autre.

3. On déduit alors que $\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow x > \alpha$

Partie B :

1. $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$, donc C_f et C_g passent par $A(0 ; 1)$, d'autre part :

$f'(x) = (-2x + 1)e^{-x}$ et $g'(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$ donc $f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$, d'où le résultat.

2. a) $f(x) - g(x) = (2x + 1)e^{-x} - \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1} = \dfrac{(2x + 1)(x^2 + x + 1)e^{-x} - (2x + 1)}{x^2 + x + 1}$

$= \dfrac{(2x + 1)[(x^2 + x + 1)e^{-x} - 1]}{x^2 + x + 1} = \dfrac{(2x + 1)\,\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$

b) On déduit alors le tableau de signe de $f - g$:

x	$-\infty$		$-½$		α		$+\infty$
Sgn $(2x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
Sgn $(\varphi(x))$		$+$		$+$	0	$-$	
Sgn $(f - g)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) Il s'en suit que $f(x) > g(x)$ pour $x \in \left]-\frac{1}{2} ; \alpha\right[$

Soit C_f au dessus de C_g sur $\left]-\frac{1}{2} ; \alpha\right[$