Term. S4 **Lundi 16 octobre**

Contrôle N° 3

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire (points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et celle en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variations.
3. On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
   - **a)** Vérifier que 0 est l'une d'elle.
   - **b)** L'autre solution est notée α. Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x.

Partie B : Etude de la fonction principale (points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer f ' et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe.
   Etudier le sens de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie A.
   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Etablir le tableau de variations de f.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

CORRIGE

Partie A :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x(2 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

2. g est dérivable sur ℝ comme somme de fonctions dérivables et $\forall$ x réel : $g'(x) = 2e^x - 1$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \geq \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	g(-ln2)	↗	$+\infty$

3. a) $g(0) = 0$

b) $g(-\ln 2) < 0 \Rightarrow$ par TVI une solution à $g(x) = 0$ dans $]-\infty\,;-\ln 2[$.

$g(-1{,}6) \approx 3{,}79$ et $g(-1{,}5) \approx -0{,}05 \quad \Rightarrow -1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$

4. On déduit alors le signe de g grace au tableau de variations :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
g(x)		+	0	$-$	0	+	

Partie B :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{2x} - x.e^x - e^x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x}(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

2. f est dérivable sur ℝ comme produit, somme et composée de fonctions dérivables sur ℝ.

Pour tout $x \in$ ℝ : $f'(x) = 2e^{2x} - [\, e^x + (x+1)e^x]$

$= 2e^{2x} - xe^x - 2e^x$

$= e^x(2e^x - x - 2)$ Soit $f'(x) = e^x.g(x)$

$\forall x \in$ ℝ , $e^x > 0 \Rightarrow f'(x)$ et $g(x)$ de même signe.

On déduit alors le tableau de variation de g grace à A.4. :

	$-\infty$		α		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	$-$	0	+	
f	0	↗	f(α)	↘	0	↗	$+\infty$

3. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2e^{\alpha} - \alpha - 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{\alpha + 2}{2}$

Alors, $f(\alpha) = e^{\alpha}\,[e^{\alpha} - (\alpha + 1)]$

$= \frac{\alpha+2}{2}\left(\frac{\alpha+2}{2} - \alpha - 1\right)$

$= \frac{\alpha+2}{2}\left(\frac{\alpha+2}{2} + \frac{-2\alpha-2}{2}\right) = \frac{\alpha+2}{2}\,\frac{-\alpha}{2} = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$

On déduit alors : $(-1{,}5)^2 < \alpha^2 < (-1{,}6)^2$ soit $2{,}25 < \alpha^2 < 2{,}56$

d'où $2{,}25 + 2\times(-1{,}6) < \alpha^2 + 2\alpha < 2{,}56 + 2\times(-1{,}5)$

Soit $-0{,}95 < \alpha^2 + 2\alpha < -0{,}44$

Et finalement : $0{,}11 < -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} < 0{,}24$

4. Tableau de variation : voir 3.

5. Graphique : voir l'écran de sa calculatrice adorée…