

Contrôle N° 3

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire (10 points)

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1$.

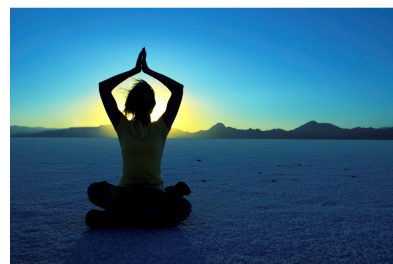
1. Etudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer g' et montrer que $g'(x)$ et $(3 - x^2)$ ont le même signe.
3. En déduire le tableau de variations de g .
4. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} .
Vérifier que $g(0) = 0$.
On note α la solution non nulle.
b) Prouvez que : $-2,4 < \alpha < -2,3$.
5. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Etude de la fonction principale (11 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. a) Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = g(x)$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_f) .
4. a) Montrer que (C_f) et (D) se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées.
b) Etudier la position relative de (D) et de (C_f) .
5. Contruire (C_f) et (D) .



CORRIGE

Partie A :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

2. g est dérivable sur \mathbb{R} comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et pour tout x réel : $g'(x) = (2x + 2)e^{-x} + (x^2 + 2x - 1)(-1)e^{-x}$

$$\text{Soit } g'(x) = (-x^2 + 3)e^{-x}.$$

$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$, donc $g'(x)$ est bien du signe de $(3 - x^2)$.

3. D'après la règle des signes du trinôme du 2nd degré, on déduit le signe de g' et les variations de g, résumé dans le tableau ci-contre :

| | | | | |
|---------|-----------|----------------|---------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | - | 0 | + | 0 |
| g | $+\infty$ | $g(-\sqrt{3})$ | $g(\sqrt{3})$ | 1 |

4. a) $g(\sqrt{3}) \approx 1,97$

$$g(-\sqrt{3}) \approx -7,28$$

Ainsi Sur $] -\infty ; -\sqrt{3} [$:

g est continue et $0 \in] g(-\sqrt{3}) ; +\infty [$ [intervalle image.

Le TVI assure donc l'existence de solutions à $g(x) = 0$.

Comme, de plus, g est strictement monotone sur cet intervalle, $g(x) = 0$ a une unique solution dans $] -\infty ; -\sqrt{3} [$.

Par le même raisonnement $g(x) = 0$ a une unique solution dans $] -\sqrt{3} ; \sqrt{3} [$,

Comme $g(x) > 0 \forall x \in] \sqrt{3} ; +\infty [$, on déduit que $g(x) = 0$ a exactement deux solutions dans \mathbb{R} .

$g(0) = 0$, donc la solution dans $] -\sqrt{3} ; \sqrt{3} [$ est $x = 0$.

b) Il reste alors un $\alpha \in] -\infty ; -\sqrt{3} [$ tel que $g(\alpha) = 0$.

A la calculatrice : $g(-2,4) \approx 0,56$ et $g(-2,3) \approx -2,10 \Rightarrow -2,4 < \alpha < -2,3$

5. D'après le tableau de variation, on déduit :

| | | | | |
|------------|-----------|----------|---|-----------|
| x | $-\infty$ | α | 0 | $+\infty$ |
| Sgn (g(x)) | + | 0 | - | + |

Partie B :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x + 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + 4\frac{x}{e^x} + \frac{3}{e^x} \right) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x + 3)e^{-x} = +\infty$$

2. a) f est la somme, le produit et la composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 1 - [(2x + 4)e^{-x} + (x^2 + 4x + 3)(-1)e^{-x}]$

$$\begin{aligned} &= 1 - (-x^2 - 2x + 1)e^{-x} \\ &= (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1 = g(x). \end{aligned}$$

b) On déduit alors le tableau de variations de g :

3. $f(x) - x = -(x^2 + 4x + 3)e^{-x}$ et d'après 1. on

$$\text{a bien } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x + 3)e^{-x} = 0$$

4. a) (C_f) et (D) se coupent pour x tel que :

$$f(x) = x \Leftrightarrow -(x^2 + 4x + 3)e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 \Rightarrow x_1 = -3 \text{ et } x_2 = -1$$

Ainsi les deux abscisses sont (-1) et (-3), comme ces points sont, en particulier, sur (D)

d'équation $y = x$, alors on a : A(-1 ; -1) et B(-3 ; -3)

| | | | | |
|---------|-----------|-------------|--------|-----------|
| x | $-\infty$ | α | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | + |
| f | $-\infty$ | $f(\alpha)$ | $f(0)$ | $+\infty$ |

b) (C_f) est au dessus de (D) lorsque $f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$

$$\Leftrightarrow -(x^2 + 4x + 3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [-3 ; -1]$$

