

Exercice 1 :

On considère le polynôme : $P(z) = z^4 - 1$

1. Factorisez $P(z)$
2. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de $P(z) = 0$
3. Déduisez de la question précédente les solutions dans \mathbb{C} , de l'équation $(\frac{2z+1}{z-1})^4 = 1$, d'inconnue z .

Exercice 2 :

On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

1. Déterminer deux réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$
2. Résolvez dans \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$

Exercice 3 :

A tout point M du plan d'affixe z , on associe le point M' telle que $z' = z^2 - 2(1+i)z$

1. Déterminer les coordonnées x' et y' de M' en fonction de celles x et y de M .
2. Démontrer que (H) , l'ensemble des points M tel que M' est sur l'axe des abscisses, est la courbe représentative d'une fonction h que l'on déterminera.

Exercice 4 :

Pour tout complexe $z \neq -1$, on pose : $Z = \frac{2 + \bar{z}}{1 + \bar{z}}$

$z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X, Y réels.

1. Calculer X et Y en fonction de x et y .
2. Démontrer que l'ensemble des points $m(z)$ tels que Z soit réel est une droite privée d'un point.
3. Démontrer que l'ensemble des points $m(z)$ tels que Z soit imaginaire pur est un cercle privé d'un point.

Exercice 5 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 3 cm. On désigne par A le point d'affixe i .

A tout point M du plan, distinct de A , d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' défini par :

$$z' = \frac{z^2}{i - z}$$

1. Déterminer les points M confondus avec leur image M'
2. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels.
 - a) Démontrer que $x' = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}$
 - b) Déduisez-en l'ensemble (E) des points M dont l'image M' est sur l'axe des imaginaires purs. Dessinez l'ensemble (E) .

Exercice 6 :

θ est un réel donné.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 + (2\sin \theta)z + 1 = 0$
2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O; \vec{u}, \vec{v}), A et B sont les points ayant pour affixe les solutions de (E).
Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

Exercice 7 : (Sujet DM)

On pose : $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

1. Calculer $P(2)$. Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$, puis résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$
(On note z_1 la solution de partie imaginaire strictement positive et z_2 celle de partie imaginaire strictement négative).
2. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
3. Dans un repère orthonormal direct (O; \vec{u}, \vec{v}), placer les points A, B et C d'affixes respectives 2, z_1 , z_2 puis I milieu de [AB].
4. Calculer l'affixe z_3 de I, le module de z_3 et une mesure de l'angle ($\vec{u} ; \vec{OI}$).
5. Dédire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. $P(z) = z^4 - 1$

$$= (z^2 + 1)(z^2 - 1)$$

$$= (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1)$$

2. Ainsi $P(z) = 0$ a 4 solutions dans $\mathbb{C} : S = \{i, -i, 1, -1\}$

3. On pose $Z = \left(\frac{2z+1}{z-1}\right)$, alors $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow P(Z) = 0$

Il y a donc 4 solutions :

$$Z = i \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = i \Leftrightarrow 2z+1 = i(z-1) \Leftrightarrow (2-i)z = 1-i \Leftrightarrow z = \frac{1-i}{2-i} = \frac{3}{5} - i\frac{1}{5}$$

$$Z = -i \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = -i \Leftrightarrow z = \frac{1+i}{2+i} = \frac{3}{5} + i\frac{1}{5}$$

$$Z = 1 \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = 1 \Leftrightarrow z = -2$$

$$Z = -1 \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = -1 \Leftrightarrow z = 0$$

$$\text{Finalement : } S = \left\{ \frac{3}{5} - i\frac{1}{5}; \frac{3}{5} + i\frac{1}{5}; -2; 0 \right\}$$

Exercice 2 :

$$P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$$

1. $(z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a) = z^4 + (4+a)z^3 + (6a+b)z^2 + (2a^2 + 4b)z + 2ab$

$$= P(z) \Leftrightarrow \begin{cases} 4+a=0 \\ 6a+b=-19 \\ 2a^2+4b=52 \\ 2ab=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases} \Leftrightarrow P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$$

2. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8) = 0$

$$\text{Soit } z^2 - 4z + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 \text{ et alors } z_1 = 2 + i \text{ et } z_2 = 2 - i$$

$$\text{Soit } z^2 + 4z - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 48 \text{ et alors } x_1 = -2 - 2\sqrt{3} \text{ et } x_2 = -2 + 2\sqrt{3}$$

$$\text{Finalement } S = \{2 + i; 2 - i; -2 - 2\sqrt{3}; -2 + 2\sqrt{3}\}$$

Exercice 3 :

$$z' = z^2 - 2(1+i)z$$

1. $x' + i y' = (x + iy)^2 - 2(1+i)(x + iy)$

$$= x^2 + 2ixy - y^2 - 2(x + iy + ix - y)$$

$$= (x^2 - 2x - y^2 + 2y) + i(2xy - 2x - 2y)$$

$$\text{Ainsi } x' = x^2 - 2x - y^2 + 2y \quad \text{et } y' = 2xy - 2x - 2y$$

2. M' est sur l'axe des abscisses $\Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0$

$$\Leftrightarrow 2xy - 2x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x-1) = x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1} \quad \text{si } x \neq 1$$

Ainsi, M' est sur l'axe des abscisses si et seulement si M est sur l'hyperbole (H) d'équation

$$y = \frac{x}{x-1}.$$

Exercice 4 :

$$Z = \frac{2 + \bar{z}}{1 + \bar{z}}$$

$$1. X + iY = \frac{2 + (x - iy)}{1 + (x - iy)} = \frac{[(2+x) - iy][(1+x) + iy]}{[(1+x) - iy][(1+x) + iy]} = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1+x)^2 + y^2} + i \frac{y}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$\text{Ainsi, } X = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1+x)^2 + y^2} \quad \text{et } Y = \frac{y}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$2. Z \text{ réel} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{(1+x)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x; y) \neq (-1; 0) \end{cases}$$

m est donc sur la droite d'équation $y = 0$ privé du point $A(-1; 0)$

$$3. Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2}{(1+x)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + y^2 + 2 = 0 \\ (x; y) = (-1; 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ (x; y) \neq (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow m \text{ est sur le cercle (C) de centre } I(\frac{3}{2}; 0) \text{ et de rayon } R = \frac{1}{4}$$

privé du point $A(-1; 0)$.

Exercice 5 :

1. M est invariant, donc $M = M'$ et ainsi $z = z'$.

$$\text{Il s'en suit que } z = \frac{z^2}{i - z} \Leftrightarrow z(i - z) = z^2 \text{ car } z \neq i$$

$$\Leftrightarrow 2z^2 + iz = 0$$

$$\Leftrightarrow z(2z + i) = 0 \quad \text{et donc } z = 0 \text{ ou } z = -\frac{i}{2}$$

Il y a donc deux points invariants M_1 d'affixe $z_1 = 0$ et M_2 d'affixe $z_2 = -\frac{i}{2}$

$$2. a) z' = \frac{z^2}{i - z} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{(x + iy)^2}{i - (x + iy)} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{[(x^2 - y^2) + 2ixy][-x - i(1 - y)]}{[-x + i(1 - y)][-x - i(1 - y)]}$$

$$\text{Alors } x' + iy' = \frac{-x(x^2 - y^2) + xy(1 - y)}{x^2 + (1 - y)^2} + i \frac{-2x^2y - (1 - y)(x^2 - y^2)}{x^2 + (1 - y)^2}$$

$$\text{En particulier : } x' = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2}$$

$$b) Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1 - y)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x(x^2 + y^2 - 2y) = 0 \\ x^2 + (1 - y)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ (x; y) \neq (0; 1) \end{cases}$$

Ainsi M est sur la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) privé du point $A(0; 1)$ ou sur le cercle (C) de centre A et de rayon $R = 1$.

Exercice 6 :

Peut-être un jour...mais là, ce serait dommage !

Exercice 7 :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$$

$$1. P(2) = 2^3 + 2(\sqrt{2} - 1)2^2 + 4(1 - \sqrt{2})2 - 8 = 0$$

Donc $P(z) = (z - 2) \times Q(z)$ avec $Q(z)$ de degré 2 et de coefficient dominant 1 (car P aussi)

$$P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$$

$$\text{Or } (z - 2)(z^2 + az + b) = z^3 + (a - 2)z^2 + (b - 2a)z - 2b$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) \\ b - 2a = 4(1 - \sqrt{2}) \\ -2b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 4 \end{cases} \quad \text{D'où } P(z) = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$$

$$\text{Ainsi } P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2 = 0 \text{ ou } z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$

Soit $z = 2$

$$\text{ou } z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = -8 \quad z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\text{Ainsi } S = \{2; -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$$

$$2. z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\text{car } |z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\text{Arg}(z_1) = \theta \text{ tel que : } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \theta = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

$$z_2 = \bar{z}_1 \Rightarrow z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$4. z_3 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|z_3| = \sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$(\vec{u}; \text{OI}) = \frac{1}{2}(\vec{u}; \text{OB}) [2\pi]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{4} [2\pi] \quad \Rightarrow (\vec{u}; \text{OI}) = \frac{3\pi}{8} [2\pi]$$

$$5. \text{ On déduit alors que } \text{Arg}(z_3) = \frac{3\pi}{8} [2\pi]$$

$$\text{Donc } \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\text{Re}(z_3)}{|z_3|} \text{ et } \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\text{Im}(z_3)}{|z_3|}$$

Soit finalement,

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{array} \right.$$