$1^{\text{ière}}$ S4 **Lundi 23 novembre**

Contrôle N° 4

Exercice 1 : (3 points)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1)$ **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2 + x - 1)$ **3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 2}{x + 1}$

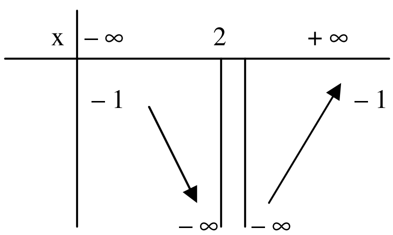
Exercice 2 : (6 points)

Soit f la fonction par $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 1}$

1. Justifier que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Etablir, en justifiant, les asymptotes à la courbe Cf représentative de f.

Exercice 3 : (3 points)

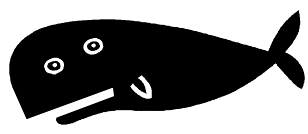
Proposer une courbe correspondant au tableau de variations suivant :



Exercice 4 : (8 points)

Soit $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 5}{x + 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et (C_f) sa courbe représentative.

1. Rappeler la définition d'une asymptote oblique à une courbe.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 2}$
3. Démontrer que (D) d'équation $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
4. Etudier les postions relatives de (C_f) et de (D) sur $\mathbb{R}$.



CORRIGE

Exercice 1 :

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2 + x - 1) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 2}{x + 1} = 3$

Exercice 2 :

1. La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x^2 - 1 \neq 0 \iff (x + 1)(x - 1) \neq 0 \quad \Rightarrow \; Df = \mathbb{R} \setminus \{ -1 ; 1\}$$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (rapport des termes de + haut degré)

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - 1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 - 1) = 0^-$

et $\lim\limits_{x \to -1} (2x + 3) = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ car …

3. Les limites en (– 1) impliquent que $x = -1$ est une asymptote verticale à (Cf).

De même pour $x = 1$.

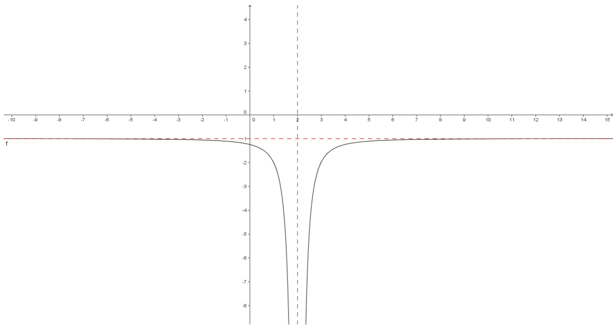
La limite en $-\infty$ implique que $y = 0$ est une asymptote horizontale à (Cf) en $-\infty$.

De même pour $y = 0$ en $+\infty$.

Exercice 3 :

Par exemple la courbe ci-contre :

(équation : $y = -1 + \dfrac{-1}{(x - 2)^2}$)



Exercice 4 :

1. $y = ax + b$ est asymptote à (Cf) en $+\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

2. $ax + b + \dfrac{c}{x + 2} = \dfrac{(ax + b)(x + 2) + c}{x + 2} = \dfrac{ax^2 + (b + 2a)x + (2b + c)}{x + 2} = \dfrac{2x^2 + 5x + 5}{x + 2}$

$$\iff \begin{cases} a = 2 \\ b + 2a = 5 \\ 2b + c = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x + 2}$$

3. $f(x) - (2x + 1) = 2x + 1 + \dfrac{3}{x + 2} - (2x + 1) = \dfrac{3}{x + 2}$

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x + 2} = 0$. De même en $-\infty$.

Donc (D) est bien asymptote à (Cf) en + et $-\infty$.

4. (Cf) est au dessus de (D) $\iff f(x) \geq 2x + 1$

$$\iff f(x) - (2x + 1) \geq 0$$

$$\iff \frac{2}{x + 2} \geq 0 \qquad \iff x + 2 \geq 0 \qquad \iff x \geq -2.$$

On déduit alors que (Cf) est au dessus de (D) sur $[-2 ; +\infty [$ et en dessous sur $] -\infty ; -2]$.