

Les nombres complexes

I. Introduction historique

Les formules de Cardan et le « célèbre » : $x^3 = 15x + 4$ et un curieux « $\sqrt{-1}$ » qui devient i ...

II. Présentation de l'ensemble \mathbb{C}

1. Définition

Déf : \mathbb{C} est l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et i est tel que $i^2 = -1$

. $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$

. $z = x + iy$ est l'**écriture algébrique** de z , cette écriture est unique.

Prop : Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

2. Règles de calculs dans \mathbb{C}

$$z + z' ; z \times z', \frac{z}{z'}$$

3. Complexe conjugué

Déf : $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

Propriétés : $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = -z \Leftrightarrow z$ imaginaire pur

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$$

$$z + \bar{z}' = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\bar{\bar{z}z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

4. Le plan complexe

A tout nombre $z = x + iy$, on associe le point $M(x ; y)$ dans $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthogonale
 z est l'afixe de M . M est l'image de z

$$Z_{\vec{AB}} = Z_B - Z_A$$

5. Résolution des équations de degré 2

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$

Si $\Delta \geq 0$ alors deux solutions réelles ...

Si $\Delta < 0$ alors il y a deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$$\text{et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

III. Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

1. Module et arguments d'un nombre complexe non nul

Déf : on nomme module de z ($z \neq 0$) le réel noté $|z|$ tel que $|z| = \text{OM}$ où M est l'image de z , et $\text{Arg}(z)$ ($z \neq 0$) toute mesure en radian de $(\vec{u} ; \vec{OM})$

Propriété : $z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ mais aussi $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
 $|z| = |\bar{z}|$ et $\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z) [2\pi]$
 Propriétés : $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
 $\text{Arg}(zz') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') [2\pi]$
 $\text{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') [2\pi]$
 $\text{Arg}(z^n) = n \cdot \text{Arg}(z) [2\pi]$

2. Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Déf : Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle forme trigonométrique de z l'écriture :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Propriété : $r = |z|$ et $\theta = \text{Arg}(z) [2\pi]$.

L'écriture trigo est unique à 2π près.

On déduit : $\cos \theta = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{\text{Im}(z)}{|z|}$

Petit rappel :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\text{Cos } \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\text{Sin } \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

IV. Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

1. Définition

Il s'agit simplement d'une réécriture de la forme trigonométrique :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \text{Arg}(z) [2\pi].$$

Ainsi $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

2. Propriétés

$$(re^{i\theta}) \times (r'e^{i\theta'}) = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \text{ (Plus jolie formule mathématiques d'après Euler)}$$

3. Applications

$$\text{Formule de Moivre : } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$\text{Formule d'Euler : } \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Application aux formules de trigo : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

...

V. Compléments géométriques

1. Angles et arguments

Prop : Soit A, B, C et D quatre points du plan d'affixe respective a, b, c et d. Alors :

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = \text{Arg} \left(\frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi]$$

$$\text{et plus g\u00e9n\u00e9ralement : } (\vec{AB}, \vec{CD}) = \text{Arg} \left(\frac{d-c}{b-a} \right) [2\pi]$$

2. Barycentre

D\u00e9f. : Soit A, B, C trois points du plan d'affixe respective a, b, c alors G barycentre de $\{(A ; \alpha), (B ; \beta), (C ; \gamma)\}$ (avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) a pour affixe :

$$z_G = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

VI. Les transformations du plan

1. Les translations

Prop : La translation de vecteur \vec{u} d'affixe u a pour \u00e9criture complexe : $z' = z + u$

2. Les rotations

Prop : La rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ a pour \u00e9criture complexe :

$$z' = e^{i\theta} (z - \omega) + \omega$$

3. Les homoth\u00e9ties

Prop : L'homoth\u00e9tie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k ($k \in \mathbb{R}$) a pour \u00e9criture complexe : $z' = k(z - \omega) + \omega$