

Contrôle N° 4

*Durée : 3 heures*

**Exercice 1** : (5 points)

A tout nombre complexe  $z$ ,  $z \neq -2i$ , on associe  $Z = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$ .

On pose  $z = x + iy$ ,  $x$  et  $y$  deux réels.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de  $Z$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

On vérifiera  $\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2}$ .

2. En déduire la nature de :

- a) l'ensemble (E) des points M d'affixes  $z$  tels que  $Z$  soit un réel ;
- b) l'ensemble (F) des points M d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit un imaginaire pur.

3. Représenter ces deux ensembles.

**Exercice 2** : (8 points)

On se propose de résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^3 = 1$  (E).

1. Déterminer une solution réelle de (E).
2.
  - a) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $z^3 - 1 = (z - 1)(az^2 + bz + c)$
  - b) En déduire toutes les solutions de (E) dans  $\mathbb{C}$ .
3. On se place dans un repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  orthonormal d'unité 2 cm.

Soit A le point d'affixe  $z_A = 1$ , B d'affixe  $z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et C d'affixe

$$z_C = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- a) Déterminer le module et un argument de  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$ .
- b) Faire une figure.
- c) Montrer que A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. Calculer  $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ .

5. En déduire alors la nature du triangle ABC.

**Exercice 3** : (6 points)

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction  $f$  du temps  $t$ .

$f$  est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :  $f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10$ .

La température est exprimée en degrés Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) et le temps  $t$  en heures.

1. Déterminer  $f(t)$  pour  $t \geq 0$  sachant que pour  $t = 0$ , la température de l'objet est de  $220^{\circ}\text{C}$ .

2. On pourra admettre désormais que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  
 $f(t) = 200.e^{-t/2} + 20$ .

On note (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ; les unités graphiques sont 2 cm pour une heure en abscisse et 1 cm pour vingt degrés en ordonnées.

a) Etudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

b) Etudier la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

En déduire l'existence d'une asymptote (D) à la courbe (C) en  $+\infty$ .

c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en  $t = 0$ .

d) Construire (D), (T) et (C) sur  $[0 ; 7]$

3. Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est  $50^{\circ}\text{C}$ .

On laissera apparent les traits de construction.

**Exercice 4** : (3 points)

Démontrer le théorème de dérivation d'une fonction composée :

« Soit  $g$  une fonction dérivable sur  $J$  et  $u$  une fonction dérivable sur  $I$  avec  $\forall x \in I, u(x) \in J$ . Alors la fonction  $f$  définie par  $f = g \circ u$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I : f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$ . »



## CORRIGE

### Exercice 1 :

$$1. Z = \frac{z-2+i}{z+2i} = \frac{(x+iy)-2+i}{(x+iy)+2i} = \frac{[(x-2)+i(y+1)][x-i(y+2)]}{[x+i(y+2)][x-i(y+2)]}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2} + i \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2}$$

$$2. a) Z \text{ réel} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+2y+4}{x^2+(y+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+4=0 \\ x^2+(y+2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ (x; y) \neq (0; -2) \end{cases}$$

Donc (E) est la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x - 2$  privé du point A(0 ; -2)

$$b) Z \text{ est imaginaire pur ssi } \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x+3y+2=0 \\ x^2+(y+2)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4} \\ (x; y) \neq (0; -2) \end{cases} \text{ Ainsi (F) est le cercle de centre } I(1; -\frac{3}{2}) \text{ et de rayon } R = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

privé du point A (0 ; -2)

3. Graphique. Pour tracer (F), on remarque que  $AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

### Exercice 2 :

1.  $z = 1$  est une solution de  $z^3 = 1$ .

2. a)  $(z-1)(az^2 = bz+c) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$

$$= z^3 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ -c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$b) \text{ Alors } z^3 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) \\ \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z^2+z+1 = 0$$

$$\text{soit } \Delta = -3 \text{ et alors } z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Soit } S = \left\{ 1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$3.a) |z_A| = 1; \text{ Arg}(z_A) = 0 [2\pi]$$

$$|z_B| = 1; \text{ Arg}(z_B) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$|z_C| = 1; \text{ Arg}(z_C) = \frac{4\pi}{3} [2\pi]$$

b) Figure

c)  $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1 \Rightarrow A, b \text{ et } C \text{ sont sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } R = 1.$

$$4. \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5.  $\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$  donc  $AB = AC$  et ainsi  $ABC$  est isocèle en  $A$ .

$\text{Arg} \left( \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$  ce qui justifie que  $ABC$  est équilatérale

**Exercice 3 :**

1.  $y' = ay + b \Leftrightarrow y = C.e^{ax} - \frac{b}{a}$

Donc  $f(t) = C.e^{-t/2} + 20$

$f(0) = 220 \Rightarrow C + 20 = 220$ , soit  $C = 200$  et ainsi  $f(t) = 200.e^{-t/2} + 20$

2. a)  $f$  est dérivable car  $c$ 'est une solution d'une équation différentielle et

$\forall t \in \mathbb{R}_+ : f'(t) = -\frac{1}{2} \times 200.e^{-t/2} = -100.e^{-t/2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ , donc  $\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t) < 0$  et alors  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 20$ .

On déduit que  $y = 20$  est une asymptote horizontale à  $(C)$ .

c) (T) :  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$   
 $y = -100x + 220$

d)

3.  $y = 50$ , alors  $t \approx 3,8$   
 soit  $t \approx 3$  heures et 48 mn

