Term. S **Janvier 2010**

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures.
Calculatrice autorisée.
Le sujet comporte 3 pages.

Ne pas oublier d'écrire votre classe sur votre copie.

<u>Exercice 1 :</u> (7 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm). On considère dans l'ensemble des complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0.$$

Partie A :

1. Montrer que $(-i)$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :
$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$$
3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B :

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $a = 4 + i$, $b = 4 - i$, $c = -i$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point Ω est le point d'affixe $\omega = 2$ et S le point d'affixe $s = 1 + 2i$.

   a) Déterminer l'écriture algébrique de $\dfrac{s - \omega}{a - \omega}$.

   b) En déduire la nature du triangle ΩAS.

3. Démontrer que les points B, A , S, C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer (C).

4. A tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe : $z' = \dfrac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$.

a) Déterminer les affixes des points A', B' et C' associés respectivement aux points A, B et C.

b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle (C') de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer (C').

c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - i|$ en fonction de z.

d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C).

Démontrer que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$.

e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle (C).

<u>Exercice 2 :</u> (5 points)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2y' + y = 0$, dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = e^{-x/2}(x + 1) \quad (E')$$

a) Déterminer deux réels m et p tels que $f(x) = e^{-x/2}(mx^2 + px)$ soit solution de (E').

b) Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si, g – f est solution de l'équation (E).

Résoudre l'équation (E').

3. Etudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}e^{-x/2}(x^2 + 2x)$.
4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h.
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note (C) la courbe représentative de h et $\acute{\Gamma}$ celle de la fonction $x \to e^{-x/2}$.
   - **a)** Etudier les positions relatives de (C) et de $\acute{\Gamma}$.
   - **b)** Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

<u>Exercice 3 :</u> (6 points)

Pour chacune des huit affirmations ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Pour une affirmation « vraie » le candidat proposera une démonstration alors qu'un contre-exemple suffit dans le cas d'une affirmation « fausse ».

1. Soient f et g deux fonctions définies sur [0 ; + ∞[, g ne s'annulant pas :

« Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$ ».

2. « Si f est une fonction définie sur [0 ; + ∞[telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur [0 ; + ∞[alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ ».

3. On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan :

« Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ».

4. Soit f la fonction numérique définie sur [– 1 ; 1] par : $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$:

« f est continue en x = – 1 ».

5. f est la fonction définie à la question 4.

« f est dérivable en x = – 1 ».

6. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

« alors $z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$ »

7. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S a pour affixe s = 3 et le point T, t = 4i.

« L'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z - 3| = |z - 4i|$ est le cercle de centre S et de rayon 4 ».

8. « Si *a* est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur]*a* ; + ∞[, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ».

<u>Exercice 4 :</u> (2 points)

La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel :

$$\begin{cases} g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{1/x} - 1) = 1$.