

Exercice 1

Partie A

1. $(-i)^3 + (-8+i)(-i)^2 + (17-8i)(-i) + 17i = i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0$

Donc $-i$ est bien solution de (E).

2. $(z+i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz + iaz^2 + ibz + ic = az^3 + (b+ia)z^2 + (c+ib)z + ic$

Donc $(z+i)(az^2+bz+c) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$ équivaut à $az^3 + (b+ia)z^2 + (c+ib)z + ic = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$ si et seulement si

$$\begin{cases} a=1 \\ b+ia=-8+i \\ c+ib=17-8i \\ ic=17i \end{cases}$$

Après résolution du système par équivalence on en déduit que

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=17 \end{cases}$$

3. $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 - 8z + 17)$ car $-i$ est solution de (E) d'après 1) on peut donc factoriser par $z - (-i)$ et par $(z^2 - 8z + 17)$ d'après 2).

4. $z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$ équivaut à

$(z+i)(z^2 - 8z + 17) = 0$ équivaut à $z = -i$ ou $z^2 - 8z + 17 = 0$

Réolvons cette équation dans C

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17 = -4$ donc les 2 racines complexes sont $\frac{8+2i}{2}$ et $\frac{8-2i}{2}$

Les solutions de (E) sont donc :

$\{-i ; 4+i ; 4-i\}$

Partie B

1. Figure A(4+i) ; B(4-i) et C(-i)

2. a) $\frac{s-\omega}{a-\omega} = \frac{1+2i-2}{4+i-2} = \frac{-1+2i}{2+i} = \frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5i}{5} = i$

b) $(\Omega A, \Omega S) = \arg\left(\frac{s-\omega}{a-\omega}\right) = \arg i = \frac{11}{2} (2\pi)$ Donc le triangle ΩAS est rectangle en Ω . D'autre part $\left|\frac{s-\omega}{a-\omega}\right| = |i| = 1$ donc $|s-\omega| = |a-\omega|$ donc $\Omega S = \Omega A$. Le triangle ΩAS est rectangle isocèle de sommet principal Ω .

3. $\Omega A = \Omega S = |s - \omega| = |1+2i-2| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\Omega B = |b - \omega| = |4-i-2| = |2-i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\Omega C = |c - \omega| = |-i-2| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$

Donc A, B, C et S sont sur le même cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

4.

a.

$a' = \frac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2} = \frac{2i+9}{2+i} = \frac{(2i+9)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{20-5i}{5} = 4-i = b$

$b' = \frac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2} = \frac{2i+11}{2-i} = \frac{(2i+11)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{20+15i}{5} = 4+3i$

$c' = \frac{-i^2+10-2i}{-i-2} = \frac{11-2i}{-i-2} = \frac{(11-2i)(i-2)}{(-i-2)(i-2)} = \frac{15i-20}{5} = -4+3i$

b.

$A'P = |i-4+i| = |-4+2i| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

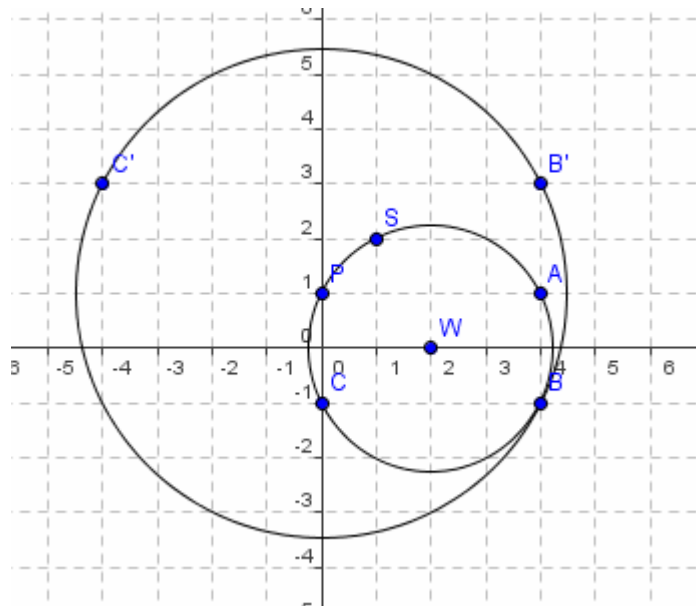
$B'P = |i-4-3i| = |-4-2i| = \sqrt{20}$

$C'P = |i+4-3i| = |4-2i| = \sqrt{20}$ donc A', B', et C' appartiennent au cercle de centre P et de rayon $\sqrt{20}$.

$$c. |z'-i| = \left| \frac{(z+10-2i)}{z-2} - i \right| = \left| \frac{(z+10-2i)-(z+2i)}{z-2} \right| = \frac{10}{|z-2|}$$

$$d. M(z) \in (C) \text{ alors } |z-2| = \sqrt{5} \text{ et d'après 4.c. } |z'-i| = \frac{10}{|z-2|} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

e. Lorsque M appartient au cercle (C), M' appartient alors au cercle de centre P(i) de rayon $2\sqrt{5}$.



Exercice 2

$$1. 2y' = -y \text{ équivaut à } y' = -\frac{1}{2}y$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $y(x) = C e^{-\frac{1}{2}x}$ où C est une constante réelle.

2. a. f est dérivable

$$\text{et } f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} (mx^2 + px) + e^{-\frac{1}{2}x} (2mx + p)$$

f est solution de (E') équivaut à $2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} (x+1)$ équivaut à

$$2e^{-\frac{1}{2}x} (2mx + p) = e^{-\frac{1}{2}x} (x+1)$$

donc f solution de (E'), équivaut à $4m=1$ et $2p=1$ soit $m=1/4$ et $p=1/2$.

2b. On sait que g est solution de (E') et que f est une solution particulière de (E') cela équivaut à :

$$2g'(x) + g(x) = e^{-\frac{1}{2}x} (x+1) \text{ et } 2f'(x) + f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} (x+1)$$

équivaut à $2(g'(x) - f'(x)) + g(x) - f(x) = 0$ équivaut à g-f solution de (E)

équivaut à $g(x) - f(x) = C e^{-\frac{1}{2}x}$ d'après 1.

$$\text{équivaut à } g(x) = f(x) + C e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right) + C e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Les solutions de (E') sont de la forme $e^{-\frac{1}{2}x} \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right) + C e^{-\frac{1}{2}x}$ où C est une constante réelle.

$$3. \text{ Etude de h définie par } h(x) = \frac{1}{4} e^{-x/2} (x^2 + 2x)$$

h est dérivable sur IR et $h'(x) = \frac{1}{4} * \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x/2} (x^2 + 2x) + \frac{1}{4} e^{-x/2} (2x + 2)$

$$h'(x) = \frac{1}{4} e^{-x/2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 2\right) \text{ est du signe de } -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

$$\Delta = 1 - 4 * \left(-\frac{1}{2}\right) * 2 = 5 \text{ donc}$$

$h'(x)$ est négatif pour $x \geq 1 + \sqrt{5}$

et pour $x \leq 1 - \sqrt{5}$ donc h est décroissante sur $]-\infty; 1 - \sqrt{5}]$ et $h'(x)$

est positif sur $[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$ donc h est croissante sur

$[1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}]$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

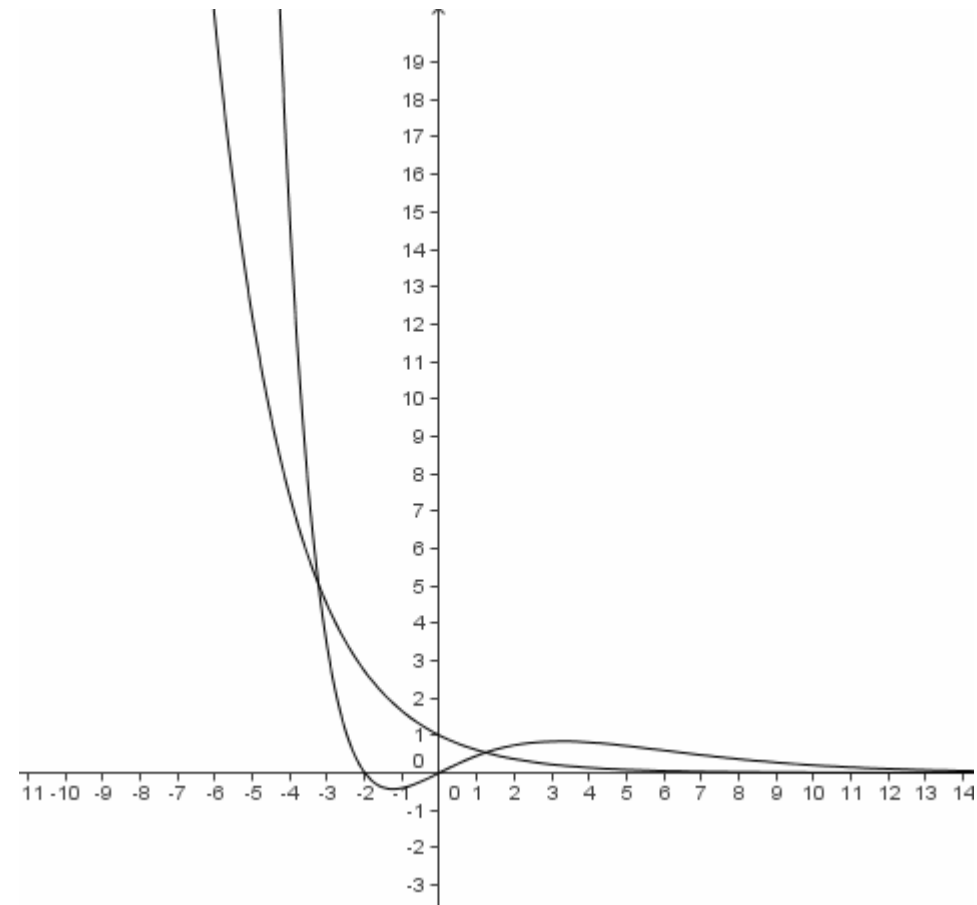
5. $\frac{1}{4} e^{-x/2} (x^2 + 2x) - e^{-x/2}$

$= e^{-x/2} (\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1)$ est

du signe de $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

soit positif pour $x \leq -1 - \sqrt{5}$ et pour $x \geq -1 + \sqrt{5}$ et négatif sur $[-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}]$.

Donc C est au dessus de Γ' sur $]-\infty; -1 - \sqrt{5}[\cup]-1 + \sqrt{5}; +\infty[$ et C est au dessus de Γ' $[-1 - \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}]$.



Exercice 3

1. Faux . Si $f(x) = -x^2 + 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $g(x) = x + 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$.
2. Vraie par le théorème des gendarmes
3. Faux si $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ non définie en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$
4. Vraie car f est le produit de 2 fonctions continues sur $[-1; 1]$, elle est donc continue en -1.

5. **Faux car** $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x^2}}{1+x} = \frac{(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ a pour limite $+\infty$ en $x=-1$ avec $x > -1$ donc f n'est pas dérivable en -1 .
6. **Faux car** $z^{14} = \left(\sqrt{2} e^{\frac{i}{3}}\right)^{14} = \sqrt{2}^{14} (e^{i\pi/3})^{14} = 128 e^{\frac{14i\pi}{3}} = 128 e^{\frac{2i\pi}{3}}$
 $= 128(-1/2 + i\sqrt{3}/2) = -64 + 64\sqrt{3}i$
7. Faux c'est la médiatrice de [ST].
8. Faux car si $f(x) = e^{-x}$ définie et décroissante sur $]0; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est 0.

Exercice 4

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = (\exp(x))'(0) = \exp(0) = 1$$

En posant $h = \frac{1}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = 0$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$