Trigonométrie

I. Le cercle trigonométrique

1. Définitions

On « enroule » l'axe réel autour d'un cercle de rayon 1 ce qui permet de graduer le cercle.

Convertion degré / radian (exemple : 180° $\rightarrow \pi$ rad ; 90° $\rightarrow \frac{\pi}{2}$ rad …)

Déf : deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent un angle **orienté** ($\vec{u}$;$\vec{v}$)

2. Mesures d'angles

A chaque point du cercle trigo. correspond une infinté de mesures, toutes égales à 2π près.

La mesure principale est celle dans $]-\pi ; \pi]$.

Propriétés : $(\vec{u} ; \vec{v}) = (k\vec{u} ; k\vec{v})$ $[2\pi]$, en particulier si $k = -1$.

$(\vec{u} ; \vec{v}) = -(\vec{v} ; \vec{u})$ $[2\pi]$

$(\vec{u} ; \vec{v}) + (\vec{v} ; \vec{w}) = (\vec{u} ; \vec{w})$ $[2\pi]$ (relation de Chasles)

$(\vec{u} ; \vec{v}) = 0$ ou π $[2\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires.

II. Fonctions trigonométriques

1. Définition

Soit M (x ; y) dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal où O est le centre d'un cercle trigonométrique et tel que $(\vec{i} ; \overrightarrow{OM}) = \alpha$ $[2\pi]$. Alors $x = \cos \alpha$ et $y = \sin \alpha$.

2. Propriétés

$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(x + \pi) = -\sin x$	$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(x + \pi) = -\cos x$	$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

Compléments:

1) Formules d'additions : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

2) Formules de duplication : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

3. Etude des fonctions sur $\mathbb{R}$

sin et cos sont périodique de période $T = 2\pi$.

$(\cos x)' = -\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$

cos est paire et sin impaire

…

III. Coordonnées polaires

Déf : Le couple $(O ; \vec{i})$ (avec $\|\vec{i}\| = 1$) est une repère polaire dans lequel tout point M ($\neq 0$) a pour coordonnées $(r ; \theta)$ tel que $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ avec $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta = (\vec{i} ; \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$.

Propriété : M a pour coordonnées cartésiennes (x ; y) dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et M a pour coordonnées polaires $(r ; \theta)$ dans $(O ; \vec{i})$ alors $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.