

Problème :

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.

On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$, les solutions de l'équation $E_a : x^a = a^x$.

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2 .

2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a .

3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e .

On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = x - e \ln x$.

a. Question de cours :

On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\frac{e^t}{t}$ tend vers $+\infty$.

Démontrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b. Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.

c. Étudier les variations de h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e .

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

b. Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f .

d. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2 cm).

3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) : si $a \in]0 ; 1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;

(P_2) : si $a \in]1 ; e[\cup]e ; +\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b , l'une appartenant à l'intervalle $]1 ; e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]e ; +\infty[$.