

## EXERCICE 4 (7 points)

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f_n(x) = -nx - x \ln x.$$

On note  $(C_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$ , dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Les courbes  $(C_0)$ ,  $(C_1)$  et  $(C_2)$  représentatives des fonctions  $f_0, f_1$  et  $f_2$  sont données en annexe.

On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ .

**Partie A : Étude de la fonction  $f_0$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f_0(x) = -x \ln x$ .**

1. Déterminer la limite de  $f_0$  en  $+\infty$ .
2. Étudier les variations de la fonction  $f_0$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

**Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction  $f_n, n$  entier naturel.**

Soit  $n$  un entier naturel.

1. Démontrer que pour  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f'_n(x) = -n-1-\ln x$  où  $f'_n$  désigne la fonction dérivée de  $f_n$ .
2.
  - a. Démontrer que la courbe  $(C_n)$  admet en un unique point  $A_n$  d'abscisse  $(e^{-n-1})$  une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
  - b. Prouver que le point  $A_n$  appartient à la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .
  - c. Placer sur la figure en annexe les points  $A_0, A_1, A_2$ .
3.
  - a. Démontrer que la courbe  $(C_n)$  coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté  $B_n$ , dont l'abscisse est  $(e^{-n})$ .
  - b. Démontrer que la tangente à  $(C_n)$  au point  $B_n$  a un coefficient directeur indépendant de l'entier  $n$ .
  - c. Placer sur la figure en annexe les points  $B_0, B_1, B_2$ .

Annexe (Exercice 4)

