

Contrôle N° n

*2 petites heures.
Calculatrice autorisée.*

Exercice 1 : (8 points)

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; 1]$ par : $f(x) = 1 + x \ln x$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

C est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

T est la droite d'équation $y = x$.

Question de cours :

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (on suppose connu tout autre résultat concernant la fonction \ln)

1. a. Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

b. En utilisant le signe de $x \ln x$ sur $]0 ; 1]$, montrer que :

pour tout nombre réel $x \in]0 ; 1]$, on a $f(x) \leq 1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0 ; 1]$ et en déduire les variations de f .

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0 ; 1]$ par : $g(x) = 1 + x \ln x - x$.

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0 ; 1]$ et dresser le tableau de variation de g .

On ne cherchera pas la limite de g en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite T .

Exercice 2 : (7 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C) .

c. Étudier la position relative de (D) et de (C) .

d. Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f .

Exercice 3 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d' affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_B = \bar{z}_A$ et $z_C = -3$.

1. Écrire les nombres complexes z_A , z_B , et z_C sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.



CORRIGE

Exercice 1 :

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On pose alors $X = \frac{1}{x}$ et le tour est joué...

1. a. d'après la question de cours, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

b. sur $]0 ; 1]$: $x > 0$ et $\ln x \leq 0$, donc $x \ln x \leq 0$,
il s'en suit que $1 + x \ln x \leq 1$, soit $f(x) \leq 1$

2. a. f est la somme et le produit et la somme de fonctions dérivables sur $]0 ; 1]$, donc est dérivable sur $]0 ; 1]$.

$$\forall x \in]0 ; 1] : f'(x) = x \times \frac{1}{x} + 1 \times \ln x = 1 + \ln x$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

On déduit que f est croissante sur $]\frac{1}{e} ; 1]$ et décroissante sur $]0 ; \frac{1}{e}]$

b. Tangente en $x = 1$: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, donc $y = (x - 1) + 1$ soit $y = x$ et donc T est la tangente à C au point d'abscisse $x = 1$.

3. $g(x) = 1 + x \ln x - x$

a. g est dérivable sur $]0 ; 1]$ et $\forall x \in]0 ; 1] : g'(x) = f'(x) - 1 = \ln x$

Ainsi $g'(x) < 0$ sur $]0 ; 1]$

On en déduit que g est décroissante sur $]0 ; 1]$

b. $g(1) = 0$, donc $g(x) > 0$ sur $]0 ; 1]$, ainsi $\forall x \in]0 ; 1] : 1 + x \ln x - x > 0 \Leftrightarrow 1 + x \ln x > x$

Soit $f(x) > x$ et donc C est au dessus de T sur $]0 ; 1]$.

Exercice 2 :

1. a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b. Comme $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$, on en déduit que la droite (D) est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Comme $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, on a $1 + e^{-x} > 1$ et donc $\ln(1 + e^{-x}) > 0$,

dont on déduit que l'asymptote (D) est en dessous de la courbe (C) sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \text{d. Soit } x \text{ un réel. On a } f(x) &= \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x \\ &= \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) + \frac{1}{3}x = \ln(e^x + 1) - x + \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

$$\text{soit } f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$$

e. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) = 0$

et comme par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{3}x = +\infty$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2. a. f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que composée et somme de fonctions dérivables sur leur domaine de définition.

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{2}{3} = \frac{3e^x - 2(e^x + 1)}{3(e^x + 1)} = \frac{e^x - 2}{3(e^x + 1)}$$

b. Le dénominateur de f' est strictement positif, donc f' est du signe de son numérateur,

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln(2).$$

On en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \ln 2]$ puis strictement croissante sur $[\ln 2 ; +\infty[$.

Exercice 3 :

$$1. z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z_A| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\text{Arg}(z_A) = \theta [2\pi] \text{ tq } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

$$D' \text{ ou } z_A = \sqrt{3} e^{i5\pi/6}$$

$$z_B = \bar{z}_A \Rightarrow z_B = \sqrt{3} e^{-i5\pi/6}$$

$$z_C = -3 \Rightarrow z_C = 3 e^{i\pi}$$

2.

$$3. \text{ On calcule : } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} :$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-3 + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-i\sqrt{3}} = \frac{\frac{3i\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$$

Ainsi, $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$ donc $AC = AB$ et ABC est isocèle en A ,

Et $\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ donc $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et donc le triangle ABC est en fait équilatérale.