Term. S4 **Mardi 23 février**

Contrôle N° 6 (?)

Durée : 3 heures
Calculatrice autorisée
Pompe interdite

Exercice 1 : (7 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Soit Ω un point du plan complexe d'affixe ω et θ un nombre réel.
Démontrer que la rotation de centre Ω et d'angle θ a pour écriture complexe : $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$

Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

2. Placer les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -11 + 4i$, $z_B = -3 - 4i$ et $z_C = 5 + 4i$.

3. Calculer le module et un argument du quotient : $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$, et en déduire la nature du triangle ABC.

4. Soit E l'image du point C par la rotation R de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Montrer que l'affixe de E vérifie $z_E = -3 + (8\sqrt{2} - 4)i$.
Placer le point E.

5. Soit D l'image du point E par l'homothétie H de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Placer le point D .

6. *Dans cette question, toute trace de recherche,même incomplète, ou d'initiative,même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit (Δ) la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite (Δ) et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].
Montrer que B, I et J sont alignés.

Exercice 2 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞[par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation y = ln x dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en + ∞.

2. **a**). Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$.

Interpréter graphiquement cette limite.

b) Préciser les positions relatives de (C) et de Γ.

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.

a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle]1 ; +∞[.

Démontrer que la tangente (Ta) à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - a f'(a) = 0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x f'(x)$.

b) Montrer que sur $]1 ; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

4. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer (C), Γ et cette tangente le plus précisément possible.

Exercice 3 : (8 points)

Dans ce problème, on considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = xe^{-x}$ et $g(x) = f(x) + [f(x)]^2$

Partie A : Résolution d'une équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$

1. Montrer que f est solution de (E).
2. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - f$ est solution de l'équation différentielle (E'). (E') : $y' + y = 0$.
3. Résoudre (E') puis (E).

Partie B : Etude de la fonction f.

1. **a)** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f.
2. **a)** Montrer que l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ n'admet aucune solution dans $[0 ; +\infty[$ et qu'elle admet une solution unique α dans $]-\infty ; 0[$.
   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   c) Pour quelles valeurs de x a-t-on : $f(x) \geq -\dfrac{1}{2}$?
   En déduire le signe de $2f(x) + 1$ suivant les valeurs de x.

Partie C : Etude de la fonction g et position de sa courbe représentative par rapport à une de ses tangentes.

(C) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

1. **a)** Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Montrer que $g'(x) = f'(x)[1 + 2f(x)]$.
   d) En utilisant les résultats de la partie B trouver le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g. Calculer la valeur exacte de $g(\alpha)$.
2. Donner une équation de (T) tangente à (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer (C) et (T).

Exercice 4 : (BONUS destiné à départager les gagants. Des raisonnements pertinents et rigoureux peuvent rapporter quelques points)

Soit $a = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$. En s'aidant de a², déterminer $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

CORRECTION

Exercice 1 :

Sujet Antilles-Guyanne, septembre 2009,

Un corrigé est disponible sur le site l'APMEP au lien suivant :

http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/CorrigeAntillesSsept2009.pdf

Exercice 2 :

Sujet Amérique du Nord, mai 2008,

Un corrigé est disponible sur le site l'APMEP au lien suivant :

http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/CorrigeAmeriqueNordS_Lac_2008.pdf

Exercice 3 :

Sujet donné à un endroit défini à une date précise,

Partie A :

1. $f(x) = xe^{-x}$ et $f'(x) = x(-e^{-x}) + 1e^{-x} = (1-x)e^{-x}$

Ainsi $f(x) + f'(x) = xe^{-x} + (1-x)e^{-x} = e^{-x}$ donc $f + f' = e^{-x}$ et ainsi f est solution de (E).

2. $(h - f)$ sol (E') $\Leftrightarrow (h-f)' + (h-f) = 0 \Leftrightarrow h' - f' + h - f = 0 \Leftrightarrow h' + h = f' - f \Leftrightarrow h' + h = e^{-x}$

$\Leftrightarrow$ h solution de (E)

3. Solution de (E') : $y = C.e^{-x}$

On déduit que h sol (E') $\Leftrightarrow h(x) - xe^{-x} = Ce^{-x}$

D'où : $h(x) = (C + x)e^{-x}$

Partie B :

1. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\left(f(x) = \frac{x}{e^x}\right)$

b) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ donc f' du signe de $(1-x)$,

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

On déduit le tableau de variations ci-contre :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. a) $\forall x \in [0\,;+\infty[$ $f(x) > 0$, donc $f(x) = -\frac{1}{2}$ n'a pas de sol.

Sur $]-\infty\,;0[$: f est continue, l'intervalle image est $]\frac{1}{e}\,;0]$ qui contient $-\frac{1}{2}$, donc par le TVI

$f(x) = -\frac{1}{2}$ admet des solutions sur cet intervalle. De plus f est strictement monotone et donc

$f(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;0[$.

b) $\begin{cases} f(-0{,}4) \approx -0{,}6 \\ f(-0{,}3) \approx 0{,}4 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} f(-0{,}36) \approx 0{,}52 \\ f(-0{,}35) \approx 0{,}49 \end{cases}$ donc, $-0{,}36 \leq \alpha \leq -0{,}35$

c) D'après le tableau de variations : $f(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \alpha$

Soit $f(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) \geq -1 \Leftrightarrow 2f(x) + 1 \geq 0$, on déduit que $2f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \alpha$

Partie C :

1. a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ car $g(x) = f(x).(1 + f(x))$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

b) $g'(x) = (f(x) + (f(x))^2)' = f'(x) + 2.f(x).f'(x)$ car $(u^2)' = 2u'u$

$= f'(x)[1 + 2f(x)]$

c) d'après ce qui précède,

le signe de f ' a été étudié en B1b)

$[1 + 2f(x)] \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \alpha$ d'après B2c)

$g(\alpha) = f(\alpha) + (f(\alpha))^2$

$= -\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{e+1}{e^2}$	$\searrow$	0

2. (T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = 1.(x - 0) + 0$, soit (T) : $y = x$

3. Autonomie sur géogébra par exemple.

Exercice 4 :

$a = \sqrt{2+\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$. alors $a^2 = (\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}})^2$

que l'on développe avec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ et $b = i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(on note que b est un imaginaire pur et donc $b^2 < 0$)

Ainsi, $a^2 = -2\sqrt{3} - 2i$ (après simplification)

$|a^2| = 4$ et $\arg(a^2) = \frac{7\pi}{6}$ $[2\pi]$

Il s'en suit que $|a| = 2$ et $\text{Arg}(a) = \frac{7\pi}{12}$ $\mathbf{[\pi]}$

Soit $\text{Arg}(a) = \frac{7\pi}{12}$ $[2\pi]$ soit $\text{Arg}(a) = \frac{19\pi}{12}$ $[2\pi]$

Comme $\text{Re}(a) > 0$ et $\text{Im}(a) < 0$, on déduit que que $\text{Arg}(a) = \frac{19\pi}{12}$ $[2\pi]$

Ainsi $\begin{cases} \text{Cos}\,\frac{19\pi}{12} = \frac{\text{Re}(a)}{|a|} \\ \text{Sin}\,\frac{19\pi}{12} = \frac{\text{Im}(a)}{|a|} \end{cases}$ Soit $\begin{cases} \cos\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\frac{19\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$

Or $\frac{19\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} + \pi$.

Donc $\begin{cases} \cos\frac{7\pi}{12} = -\cos\frac{19\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\frac{7\pi}{12} = -\sin\frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$