$1^{\text{ière}}$ S4 **Mardi 2 mars**

Contrôle N° 7

Durée : 2 heures
Calculatrice autorisée
Feuille de pompe distribuée avec le sujet

Exercice 1 : (8 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-3x^2+5x+4}{x+1}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) **a)** Déterminer le domaine de définition de f.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

c) Montrer que $f(x) = -3x + 8 - \dfrac{4}{x+1}$

d) Montrer alors que (D) : $y = -3x + 8$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) **a)** Déterminer la fonction dérivée de f..

Déterminer les variations de f sur son domaine de définition.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 0.

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre C_f et l'axe des abscisses.

5) Déterminer l'abscisse de tous les points de C_f pour lesquels C_f admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$.

Exercice 2 : (4,5 points)
ABC est un triangle équilatéral de côté 5cm, G est le centre de gravité de ce triangle et H est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2).

1) Construire les points G et H.

2) Déterminer et construire les ensembles suivants :

a) l'ensemble E des points M du plan vérifiant : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$,

b) l'ensemble F des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ colinéaire à $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$,

c) l'ensemble G des points M du plan vérifiant : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$

Exercice 3 : (5 points)

Les trois questions sont indépendantes :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par : $\vec{u}(\cos t\ ;\ \sin t)$ et $\vec{v}\ (2 \sin t\ ;\ 2 \cos t)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal du plan.
Déterminer t pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(2 ; 1), B(1 ; – 1) et C(– 1 ; 3).
Déterminer une valeur approchée en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$.

3. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3 et de centre de gravité G. Soit I le milieu de [AB].

a) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CI} = 0$

b) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

c) Déterminer l'ensemble (E_4) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 0$

d) Déterminer l'ensemble (E_5) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 10$

Exercice 4 : (3,5 points)

L'objectif est de résoudre : $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}$ **(1)**

1. On pose X = 2x.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos X = \cos \frac{\pi}{3}$

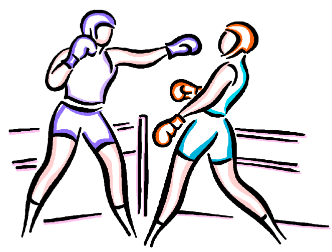
b) Placer les points P et Q dont les coordonnées polaires sont respectivement $(1\ ;\frac{\pi}{3})$ et $(1\ ; -\frac{\pi}{3})$

2. **a)** Démontrer que $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ et $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

b) Vérifier qu'il existe quatre points R, S, U et V du cercle trigonométrique dont les angles polaires sont $\frac{\pi}{6} + k\pi$ et $-\frac{\pi}{6} + k\pi$. Placer ces points.

3. **a)** On nomme A le point de coordonnées polaire (1, 0). Vérifier que les points R, S, U et V sont les points des bissectrices des angles $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OQ}})$.

b) Donner les solutions de **(1)** dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0\ ; 2\pi[$



CORRIGE

Exercice 1:

1.a) Df = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) $-3x + 8 - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{(-3x+8)(x+1) - 4}{x+1} = f(x)$

d) $f(x) - (-3x+8) = -\dfrac{4}{x+1}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-3x+8)] = \lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{4}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-3x+8)] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{4}{x+1} = 0$

Ces 2 limites justifient que (D) est asymptote oblique à C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) $f'(x) = \dfrac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}$

f '(x) est du signe de son numérateur, on calcule $\Delta = 48$, et $x_1 = -1 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ et $x_2 = -1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

le trinôme est du signe de a (ici négatif) à l'extérieur des racines.

b) On déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		x1		-1		x2		$+\infty$
Signe f '		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
Variation de f	$+\infty$	↘	$f(x_1)$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$f(x_2)$	↘	$-\infty$

3. (T) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ $\Leftrightarrow y = x + 4$

4. Intersection avec l'axe des abscisses : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 5x + 4 = 0$

On calcule $\Delta = 73$ alors $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{73}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{73}}{6}$

Il y a donc deux points $M_1\left(\dfrac{5+\sqrt{73}}{6}, 0\right)$ et $M_2\left(\dfrac{5-\sqrt{73}}{6}, 0\right)$.

5. Tangente parallèle à $y = 2x \Leftrightarrow f'(x) = 2$

soit $\dfrac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2} = 2$ $\Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 1 = 2(x+1)^2$

$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = 8$, $\alpha = -1 - \sqrt{2}$ et $\beta = -1 + \sqrt{2}$, sont les deux abscisses cherchées.

Exercice 2 :

1. G centre de gravité du triangle ABC $\Leftrightarrow$ G isobarycentre des points A, B et C.

2. a) $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left\|3.\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3.\overrightarrow{MH}\right\| \Leftrightarrow MG = MH$

Ainsi (E) est la médiatrice [GH]

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})$ avec $k \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{MG} = k \times 3.\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = k.\overrightarrow{MH}$

Soit, M, G et H alignés et ainsi (F) est la droite (GH).

c) $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\| \Leftrightarrow \left\|3.\overrightarrow{MH}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \Leftrightarrow MH = \dfrac{1}{3} \times 5 = \dfrac{5}{3}$

Ainsi (G) est le cercle de centre H et de rayon $\dfrac{5}{3}$.

Exercice 3 :

1. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow (\cos t)(2.\sin t) + (\sin t)(2.\cos t) = 0 \Leftrightarrow 4.(\cos t)(\sin t) = 0$

Soit $\cos t = 0$ alors $t = 0$ $[\pi]$

Soit $\sin t = 0$ alors $t = \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$

Ainsi, $S = \{k\pi, k'\dfrac{\pi}{2} ;$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}\}$

2. $\vec{BA}.\vec{BC} = BA \times BC \times \cos \widehat{ABC}$ d'une part

$= xx' + yy'$ d'autre part avec $\vec{BA}(1, 2)$ et $\vec{BC}(-2 ; 4)$

Soit $(1)\times(-2) + (2)\times(4) = \sqrt{5}\times\sqrt{20}\times\cos \widehat{ABC}$

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 53{,}13°$

3. a) $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}).\vec{CI} = 0 \Leftrightarrow 3.\vec{MG}.\vec{CI} = 0 \Leftrightarrow$ (E_1) est la droite $\perp$ à (CI) passant par G.

b) (E_2) est le cercle de diamètre [AB]

c) $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\vec{MA} + \vec{MB}).(\vec{MA} - \vec{MB}) = 0 \Leftrightarrow 2.\vec{MI}.\vec{BA} = 0$

M est sur la droite $\perp$ à (AB) passant par I $\Leftrightarrow$ (E_3) est la médiatrice de [AB]

d) $MA^2 + MB^2 = 10 \Leftrightarrow 2.MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2 = 10$ (par le théorème de la médiane)

$\Leftrightarrow 2MI^2 + \dfrac{1}{2}\times 3^2 = 10 \qquad \Leftrightarrow \quad MI = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

Ainsi, (E_4) est le cercle de centre I et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Exercice 4 :

1. a) $\cos X = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{\pi}{3} + k.2\pi \\ \text{ou } X = -\dfrac{\pi}{3} + k.2\pi \end{cases}$

2. a) $2x = \dfrac{\pi}{3} + k.2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k.\pi$

$2x = -\dfrac{\pi}{3} + k.2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k.\pi$

b) $x = \dfrac{\pi}{6} + k.\pi \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ et $x_2 = \dfrac{7\pi}{6}$ $[2\pi]$ sont sur le cercle trigo.

$x = -\dfrac{\pi}{6} + k.\pi \Rightarrow x_3 = -\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ et $x_4 = -\dfrac{7\pi}{6}$ $[2\pi]$ sont sur le cercle trigo.

3. a) U et R sont diamétralement opposés sur le cercle et $(\widehat{\vec{OA},\vec{OR}}) = \dfrac{1}{2}(\widehat{\vec{OA},\vec{OP}})$ $[2\pi]$, ce qui justifie que U et R sont sur la bissectice de $(\widehat{\vec{OA},\vec{OP}})$. De même pour les autres points.

b) Finalement, dans $\mathbb{R}$: $S = \{\dfrac{\pi}{6} + 2k_1.\pi ; \dfrac{5\pi}{6} 2k_2.\pi ; \dfrac{7\pi}{6} + 2k_3.\pi ; \dfrac{11\pi}{6} 2k_4.\pi$; avec $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}\}$

Et dans $[0 ; 2\pi]$: S $\{\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{7\pi}{6} ; \dfrac{11\pi}{6}\}$