Logarithmes

I. La fonction ln

1. Définition

Déf. : Soit x un réel strictement positif, on appelle ln x le réel y tel que $x = e^y$.

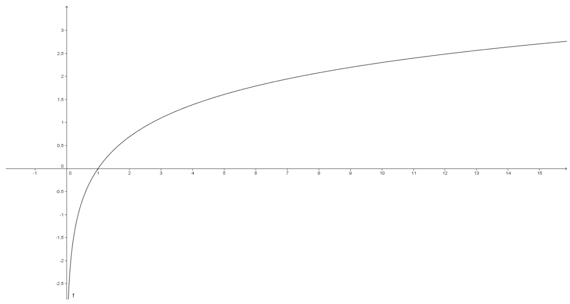
Propriétés : ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$$

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$



2. Proriétés

$\forall\, a,b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \times \ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(\sqrt{a}\,) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

II. Compléments

1. Sur les limites

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} (x.\ln x) = 0$$

2. ln u

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) > 0$, $(\ln \circ u)(x) = \ln(u(x))$ est dérivable et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

III. Les log de base a ($a > 0$, $a \neq 1$)

Déf. : Soit a un réel strictement positif et différent de 1, on appelle LOGARITHME de base a l'applicaion : $\log_a :]0 : +\infty[\;\to\; \mathbb{R}$

$$x \;\to\; \frac{\ln x}{\ln a}$$

Rmq : 1) Ainsi, ln est aussi $\log_e$

2) Le plus usité est le logarithme décimal : $\log_{10}$.

IV. Croissance comparée

$\forall\, \alpha > 0$: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\lim_{x \to 0} (x^n.\ln x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x^n.e^{-x}) = 0$