

Le Produit scalaire

I. Définitions

Déf : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls alors le **PRODUIT SCALAIRE** de \vec{u} par \vec{v} est le **réel** défini par : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$

Soit A, B, C et H quatre points tels que H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors : $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AH$ si \overline{AB} et \overline{AH} de même sens
 $= -AB \times AH$ si \overline{AB} et \overline{AH} de sens contraire.

Corollaires : 1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

2) Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

II. Propriétés

1. Propriétés algébriques

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

2. Identités remarquables

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

III. Expression dans un repère orthogonal. Equations cartésiennes.

1. Produit scalaire

Déf : Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ dans (O; \vec{i}, \vec{j}) orthogonal, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Prop : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

2. Equation cartésienne d'une droite

Prop : Equation cartésienne d'une droite : $ax + by + c = 0$ avec a, b et c $\in \mathbb{R}$.

$\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite

$\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal de la droite.

3. Equation cartésienne d'un cercle

Prop : Equation cartésienne d'un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

IV. Applications du produit scalaire.

1. Relations métriques dans un triangle

→ Théorème de la médiane : Soit I le milieu de [AB], alors pour tout point M du plan :

$$\begin{cases} \overline{MA} \cdot \overline{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2 \\ MA^2 - MB^2 = 2 \overline{IM} \cdot \overline{AB} \\ MA^2 + MB^2 = 2 MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 \end{cases}$$

→ Théorème d'AL-Kashi : On pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, alors :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \hat{C} \end{cases}$$

→ Propriété : Avec les notations précédentes, en notant S l'aire du triangle :

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} bc.\sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac.\sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab.\sin \hat{C} \\ \text{et} \\ \frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \end{cases}$$

2. Relations trigonométriques

Propriété 1:

$$\begin{aligned} \cos (a + b) &= \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \\ \cos (a - b) &= \cos a.\cos b + \sin a.\sin b \\ \sin (a + b) &= \sin a.\cos b + \sin b.\cos a \\ \sin (a - b) &= \sin a.\cos b - \sin b.\cos a \end{aligned}$$

Propriété 2:

$$\begin{cases} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\ \sin 2a = 2\sin a.\cos a \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos^2 a = \frac{1}{2} (\cos 2a + 1) \\ \sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a) \end{cases}$$