

Les suites numériques

I. Généralités

1. Définition

Déf : Une suite (U_n) est une application de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto U_n$

Ex : 1) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$ 2) $U_n = \frac{3n+1}{n^2+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

→ Il existe deux façons de définir une suite :

1) avec une relation explicite : $U_n = f(n)$

2) avec une **relation de récurrence** : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

2. Sens de variation d'une suite

Prop : une suite (U_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $U_{n+1} \geq U_n$ (resp. $U_{n+1} \leq U_n$)

Rmq : une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. Ex : $U_n = -2U_n$ avec $U_0 = 3$

Prop : 1) une suite est croissante ssi $U_{n+1} - U_n \geq 0$

2) si $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, alors (U_n) croissante ssi $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$.

II. Les suites arithmétiques

Déf : (U_n) arithmétique $\Leftrightarrow U_{n+1} = U_n + r \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $r \in \mathbb{R}$ est la **raison** de la suite.

Prop : $U_n = U_p + (n-p)r ; \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$.

En particulier : $U_n = U_0 + nr$ et $U_n = U_1 + (n-1)r$

Somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)$

De façon générale, on peut retenir : $S = \frac{N^{\text{bre}} \text{ de termes}}{2} (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})$.

III. Les suite géométriques

Déf : (U_n) géométrique $\Leftrightarrow U_{n+1} = q \times U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $q \in \mathbb{R}$ est la **raison** de la suite.

Prop : $U_n = U_p \times q^{n-p} ; \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$.

En particulier, $U_n = U_0 \times q^n$ et $U_n = U_1 \times q^{n-1}$

Somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{U_{n+1} - U_0}{q - 1}$

De façon générale, on peut retenir : $S = \frac{\text{Le terme après le dernier} - \text{le } 1^{\text{er}}}{q - 1}$

Application : Un placement à $t\%$ à intérêts composés peut être représenté par une suite géométrique de raison $q = 1 + \frac{t}{100}$.