Les suites numériques

I. Généralités

1. Définition

Déf : Une suite (U_n) est une application de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \hookrightarrow U_n$

Ex : 1) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$ 2) $U_n = \dfrac{3n+1}{n^2+2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\longrightarrow$ Il existe deux façons de définir une suite :

1) avec une relation explicite : $U_n = f(n)$

2) avec une relation de récurrence : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

2. Sens de variation d'une suite

Prop : une suite (U_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $U_{n+1} \geq U_n$ (resp. $U_{n+1} \leq U_n$)

Rmq : une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. Ex : $U_n = -2U_n$ avec $U_0 = 3$

Prop : 1) une suite est croissante ssi $U_{n+1} - U_n \geq 0$

2) si $U_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors (U_n) croissante ssi $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$.

3. Représentation graphique

Succinctement : si $U_{n+1} = f(U_n)$, alors on trace $y = f(x)$ et $y = x$. La représentation graphique ressemble le plus souvent à un escalier ente les deux courbes.

II. Les suites arithmétiques

Déf : (U_n) arithmétique $\Leftrightarrow$ $\mathbf{U_{n+1} = U_n + r}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $r \in \mathbb{R}$ est la **raison** de la suite.

Prop : $U_n = U_p + (n-p)r$; $\forall n, p \in \mathbb{N}$.

En particulier : $U_n = U_0 + nr$ et $U_n = U_1 + (n-1)r$

Somme : $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \dfrac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$

De façon générale, on peut retenir : $S = \dfrac{N^{bre} \text{ de termes}}{2}$ (1^{ier} terme + dernier terme).

III. Les suite géométriques

Déf : (U_n) géométrique $\Leftrightarrow$ $\mathbf{U_{n+1} = q \times U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $q \in \mathbb{R}$ est la **raison** de la suite.

Prop : $U_n = U_p \times q^{n-p}$; $\forall n, p \in \mathbb{N}$.

En particulier, $U_n = U_0 \times q^n$ et $U_n + U_1 \times q^{n-1}$

Somme : $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \dfrac{U_{n+1} - U_0}{q-1}$

De façon générale, on peut retenir : $S = \dfrac{\text{Le terme après le dernier} - \text{le } 1^{ier}}{q-1}$

Application : Un placement à t % à intérêts composés peut être représenté par une suite géométrique de raison $q = 1 + \dfrac{t}{100}$.

IV. Limites de suites

Déf. : Une suite (U_n) est dite **convergente** et converge vers un réel ℓ si : $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \ell$.

Rmq : La seule limite possible pour une suite est un + ∞ !

Il existe deux types de suites non convergente : 1) $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \pm \infty$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} U_n$ n'existe pas ($U_n = (-1)^n$).

<u>Propriétés :</u>

1) Une suite arithmétique de raison non nul n'est JAMAIS convergente.

2) Pour une suite arithmétique (U_n) de raison $q \neq 1$:

si $q \leq -1$: U_n n'a pas de limite.

si $-1 < q < 1$: U_n **converge** vers 0

si $q > 1$: $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \pm \infty$ (selon le signe de U_0)

En résumé, si une suite géométrique converge, alors c'est vers 0 et $q \in \,]-1 ; 1[$.